Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

В.А. Жаров

Определение внутренних силовых факторов и расчет на прочность и жесткость деталей приборных устройств

Учебное пособие

Под редакцией *В.А. Городничева*

BAUMANPRESS
Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана
2015

УДК 539.3./6(075.8)
ББК 30.121
Ж35

Издание доступно в электронном виде на портале *ebooks.bmstu.ru*
по адресу: http://ebooks.bmstu.ru/catalog/115/book1278.html

Факультет «Радиоэлектроника и лазерная техника»
Кафедра «Элементы приборных устройств»

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом МГТУ им. Н.Э. Баумана
в качестве учебного пособия

Жаров, В. А.

Ж35 Определение внутренних силовых факторов и расчет на прочность и жесткость деталей приборных устройств : учебное пособие / В. А. Жаров ; под ред. В. А. Городничева. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. — 89, [3] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-4232-4

Изложены методические вопросы создания расчетных схем, соответствующих проектируемым деталям приборных устройств, на основе анализа и использования приемлемых упрощающих допущений для всей совокупности внешних нагрузок, действующих на деталь, ее опор с учетом формы и материала. Показано, как методически выполнить переход от реальной проектируемой детали или ее конструктивной схемы к расчетной схеме, являющейся основой для построения эпюр внутренних силовых факторов. Представлены основные формулы расчетов на прочность и жесткость для различных видов нагружения стержневых расчетных схем, приведены примеры их расчетов.

Учебное пособие соответствует Федеральным государственным образовательным стандартам высшего образования третьего поколения.

Для студентов второго и третьего курсов приборостроительных специальностей, программы дисциплин которых содержат вопросы конструирования приборных устройств различного назначения и их элементов.

УДК 539.3./6(075.8)
ББК 30.121

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015
© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015

ISBN 978-5-7038-4232-4

Предисловие

Цель автора пособия состоит в том, чтобы помочь студентам, выполняющим конструирование деталей приборов, правильно осуществить переход от реальной детали к соответствующей ей расчетной схеме, на основе представленных теоретических и методических положений найти реакции опор и построить эпюры для этой схемы, а затем по построенным и проверенным эпюрам выполнить расчеты на прочность и жесткость.

Объединение деталей в сборочные единицы, рассматриваемое в процессе разработки конструкции проектируемого устройства, при переходе от конкретных деталей к их расчетным схемам требует знания тех или иных видов опор, которые соответствуют данным сборочным единицам, и определения реакций в этих опорах для дальнейшей работы с расчетными схемами деталей.

В базовых курсах лекций при рассмотрении вопросов конструирования типовых деталей приборных устройств, их расчетов на прочность и жесткость используют эпюры внутренних силовых факторов (в.с.ф.) и напряжений (например, расчет валов на прочность и крутильную и изгибную жесткость, расчет зуба зубчатого колеса на прочность и определение его основной характеристики — модуля, расчет элементов соединительных и предохранительных муфт, штифтов и шпонок и др.).

Помимо расчета типовых деталей приборных устройств студентам при выполнении курсовых работ и проектов приходится выполнять расчеты на прочность и жесткость различных (нетиповых) элементов (например, упругого чувствительного элемента — четырехлопастной пружины, S-образной пружины и др.). Это требует умения строить эпюры в.с.ф. для них и использовать полученные эпюры в процессе проектирования и разработки конструкций эле-

ментов. В пособии рассмотрены методические аспекты, представляющие основу решения задач построения эпюр, и приведены примеры построения эпюр не только для типовых расчетных схем (балка, плоская и пространственная рамы), но и для некоторых нетиповых деталей приборных устройств, а также рассмотрена сравнительно сложная задача расчета перемещений системы упругих контактов в реле.

Учебное пособие соответствует программам дисциплин «Основы конструирования приборов» и «Прикладная механика» кафедры «Элементы приборных устройств» МГТУ им. Н.Э. Баумана и содержит материал, расширяющий и дополняющий базовые курсы лекций по указанным программам.

ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ

При решении вопросов прочности и жесткости деталей приборов и машин, возникающих в процессе их конструирования, обычно рассматривают не сами детали, а их расчетные схемы, которые получают с использованием допускаемых упрощений. Так поступают вследствие имеющегося бесконечного разнообразия форм, размеров, материалов и особенностей реальных деталей.

В результате применяемых упрощений форм деталей их разнообразие сводится к трем формам: стержню (для которого размеры по двум пространственным осям много меньше, чем размер по третьей оси), пластине (для нее размеры по двум осям больше, чем размер по третьей оси) и массивному телу (для которого размеры по трем пространственным осям примерно одинаковы). Такой подход очень часто позволяет применять одну и ту же расчетную схему ко многим деталям.

Наиболее широкое распространение имеют расчетные схемы, элементы которых представляют в форме стержней (стержневые расчетные схемы). Используют одноосные, плоские и пространственные, стержневые расчетные схемы (так называемые плоские и пространственные рамы).

При расчетах на прочность и жесткость в результате допускаемых упрощений применительно к реальным материалам деталей конструкционный материал в большинстве случаев представляют как сплошной, однородный, изотропный, упругий.

Реальные детали приборов и машин при их функционировании и даже в результате сборки в сборочные единицы при создании изделий подвергаются действию внешних сторонних нагрузок, а также реакций в виде сил и моментов в местах контакта с другими деталями — опорах (т. е. реакции опор для рассматриваемой детали также являются внешними силами и моментами). При составлении и дальнейшем применении расчетных схем внешние нагрузки и реакции опор, как и сами опоры, допустимо упрощают (схематизируют) и получают расчетные схемы со схематизированными опорами и внешними нагрузками.

При проектировании деталей важно знать, в каких местах возникают максимальные напряжения, ведь эти места наиболее опасны с точки зрения возможности разрушения или появления недопустимых пластических деформаций.

Для определения напряжений и деформаций, возникающих при действии внешних нагрузок в различных местах расчетной схемы, первостепенное значение имеют анализ появления в них в.с.ф. и установление их значений. Внутренние силовые факторы — силы и моменты в материале детали, находящейся под действием внешних нагрузок и реакций опор, обусловлены возникновением там механических напряжений и соответствуют характеру ее деформаций. Расчеты на прочность по напряжениям, расчеты на жесткость проводят с использованием в.с.ф. — обычно максимальных изгибающих и крутящих моментов, а также продольных (растягивающих и сжимающих) и поперечных (перерезывающих) сил. По максимальным значениям в.с.ф. определяют максимальные значения напряжений и деформаций.

Для нахождения в.с.ф. используют метод сечений, в соответствии с которым применительно к стержневой расчетной схеме ее элемент — стержень мысленно расчленяют на части поперечными сечениями, для которых определяют значения в.с.ф.

В основу применения метода сечений и определения с его помощью в.с.ф. положено условие, что деталь прибора (машины) и соответствующая расчетная схема находятся в состоянии статического равновесия при действии внешних нагрузок и реакций опор.

Статическое равновесие детали обеспечивается совокупностью условий:

1) необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма всех n сил F_i, действующих на нее, была равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0,$$

или в проекциях на оси:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0; \qquad (1)$$

2) сумма всех внешних n моментов $\vec{M}_i$, действующих на деталь относительно любой ее точки, также должна быть равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0,$$

или в проекциях на оси:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0. \qquad (2)$$

Необходимо помнить, что действие силы не изменится, если требуется перенести ее вектор из точки приложения на детали (на расчетной схеме) в некоторую другую точку этой детали на линии действия силы. Если необходим перенос вектора силы в некоторую точку на направление, параллельное направлению действия этой силы, то перенос выполняют в соответствии с правилом Штейнера: действие силы не изменится при ее параллельном переносе в некоторую точку, если в этой точке одновременно приложить момент от переносимой силы (плечом силы при этом является расстояние от рассматриваемой точки до оси, по которой была направлена сила, что также определяет направление момента). Такие переносы сил необходимы при рассмотрении статического равновесия как целой расчетной схемы, так и мысленно отделяемых от нее частей при использовании метода сечений.

В соответствии с очевидным принципиальным положением, составляющим основу метода сечений, у расчетной схемы, находящейся в состоянии статического равновесия, любая мысленно отделенная от нее часть также находится в состоянии статического равновесия. При таком мысленном отделении в сечении, по которому оно производится, для обеспечения статического равновесия отделяемой части должны существовать (и имеются) в.с.ф., определяемые из приведенных выше выражений (1), (2), которые в этом случае становятся уравнениями.

Использование метода сечений при работе с расчетными схемами базируется на принципе начальных размеров. Детали приборов и машин, находящиеся под действием внешних нагрузок и реакций опор в состоянии статического равновесия, упруго деформируются (изменяют упруго свои форму и размеры). В подав-

ляющем большинстве случаев эти изменения незначительны (хотя при этом могут возникать опасно большие напряжения), и тогда можно считать, что форма и размеры деталей остаются при действии нагрузок первоначальными и неизменными. В противном случае требовалось бы учитывать перемещения одних частей детали относительно других ее частей (что меняло бы форму и размеры детали), т. е. невозможно было бы использовать одну и ту же расчетную схему применительно к различным нагрузкам и деталям.

Перед началом работы по определению в.с.ф. со стержневой расчетной схемой связывают прямоугольную систему координат так, что одна из ее осей (обычно ось z) располагается по оси одного из стержней. Две другие оси координат также по возможности располагают по направлениям других стержней (если они имеются) в расчетной схеме. Для одностержневой расчетной схемы ось y обычно направляют вверх.

Далее в расчетной схеме, нагруженной внешними нагрузками (силами, моментами, распределенными вдоль осей стержней нагрузками), определяют реакции опор из уравнений статического равновесия (1), (2). Вначале направления действия реакций (сил и моментов) выбирают произвольно, но, если в результате решения уравнений будут получены отрицательные значения этих реакций, то первоначально выбранные направления их действия должны быть изменены на противоположные, и тогда значения реакций можно будет считать положительными.

В итоге получают расчетную схему в состоянии статического равновесия, для которой известны все действующие на нее внешние силовые факторы — внешние нагрузки и реакции опор.

Расчетная схема может быть представлена в виде стержня (стержней), состоящих из участков. Участком считают часть стержня с приложенными на нем в известных местах некоторыми известными внешними силовыми факторами, такую, что в пределах данного участка состав этих силовых факторов остается неизменным (при решении других задач участками могут считаться части стержня, например, с различными по форме и размерам сечениями или выполненные из разных материалов).

При решении задачи определения в.с.ф. участки рассматривают как следующие по оси стержня один за другим в некотором условно принятом направлении, например, справа налево, сверху вниз или наоборот.

После представления стержневой расчетной схемы в виде участков, используя метод сечений, на этих участках мысленно проводят сечения, расположенные по нормали к оси стержня, и начало системы координат, связанной ранее со стержнем, также мысленно переносят в начало участка. При проведении сечения от стержня мысленно отсекают некоторую его часть (каждый раз) и рассматривают ее состояние статического равновесия (поскольку вся стержневая расчетная схема находится в состоянии статического равновесия), при котором для его обеспечения в сечении необходимо наличие в.с.ф. — сил и моментов (пар сил). Внутренние силы в сечении обычно представляют не в виде вектора некоторой равнодействующей, а сразу в виде ее проекций N, Q_x и Q_y на оси системы координат. Одна из проекций — N имеет направление по оси стержня, например по оси z (по нормали к плоскости сечения), и является для него растягивающей или сжимающей силой (в зависимости от направления по отношению к сечению), а две другие проекции располагаются в плоскости сечения и направлены по двум другим осям координат (по осям x и y) и для стержня являются поперечными (перерезывающими) силами Q_x и Q_y. Внутренний момент в сечении также представляют относительно его центра в виде проекций, причем проекция на ось координат, совпадающую с осью стержня (например, z), является крутящим моментом $M_{\text{кр}}$ (M_z), а две другие проекции M_x и M_y — это изгибающие моменты, действующие соответственно в плоскостях yz и xz.

Внутренние силовые факторы: N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z определяют из уравнений, аналогичных (1), (2). Значения в.с.ф. находят, используя граничные значения для плеч сил и отрезков распределения распределенной нагрузки, обозначаемой q.

При разбиении стержней расчетной схемы на участки для каждого из них получают свои уравнения статического равновесия — переход от одного участка к другому сопровождается изменением этих уравнений, так как при этом добавляются те или иные внешние силовые факторы. Отметим также, что, согласно третьему закону Ньютона, любой внутренней силе и любому моменту в мысленно проведенном сечении в одной отсеченной части стержня соответствуют равные по модулю и противоположные по направлению сила и момент в другой части стержня.

Значения в.с.ф. обычно вычисляют для начала и конца каждого участка, а также для сечений, где они принимают на участке максимальные значения (такие сечения являются опасными — в них можно ожидать разрушения стержня или появления пластических деформаций, недопустимых при эксплуатации реальной детали). Положение опасных сечений и максимальные значения в.с.ф. в них удобно устанавливать с помощью эпюр в.с.ф., которые строят как функции изменения в.с.ф. по длине участка стержня, полученные из уравнений равновесия этого участка. Для решения вопросов прочности кроме эпюр в.с.ф. широко используют эпюры напряжений.

При построении эпюр кроме значений в.с.ф. важны их знаки, которые характеризуют направления соответствующих деформаций.

Нормальную силу N, если она растягивающая по отношению к мысленно отсеченной части стержня, считают положительной, соответственно, если эта сила сжимающая, то ее считают отрицательной (рис. 1, *а*), что находит отражение при построении эпюр. Знак силы N имеет значение в первую очередь при расчетах на прочность деталей, выполненных из некоторых материалов (чугун, керамика, легированные стали и др.), которые по-разному сопротивляются растяжению и сжатию; тогда прочность деталей при растяжении и сжатии может существенно различаться.

Знаки в.с.ф. — поперечной силы Q и изгибающего момента $M_{\text{изг}}$ на их эпюрах зависят от направления осей системы координат, связанной с мысленно отсекаемой частью стержня. Если ось y направлена вверх, а ось z — по продольной оси стержня налево, то при отсечении от него некоторой части на правой стороне сечения силу Q_y, для которой предварительно было выбрано направление, совпадающее с положительным направлением оси y и значение которой было получено положительным при решении уравнений равновесия для этой отсеченной части, при построении эпюры также считают положительной. Если ось z направлена по продольной оси стержня направо, то на правой стороне сечения сила Q_y, значение которой при решении уравнений равновесия было получено предварительно положительным, при построении эпюры должна считаться отрицательной, если она была направлена в отрицательном направлении оси y (рис. 1, *б*).

Таким образом, если перед рассмотрением равновесия мысленно отсеченной части стержня в ее сечении для силы Q_y было предварительно выбрано некоторое направление, а в результате расчетов получено ее отрицательное значение, то это направление силы нужно изменить на противоположное и далее считать, что сила имеет положительное значение.

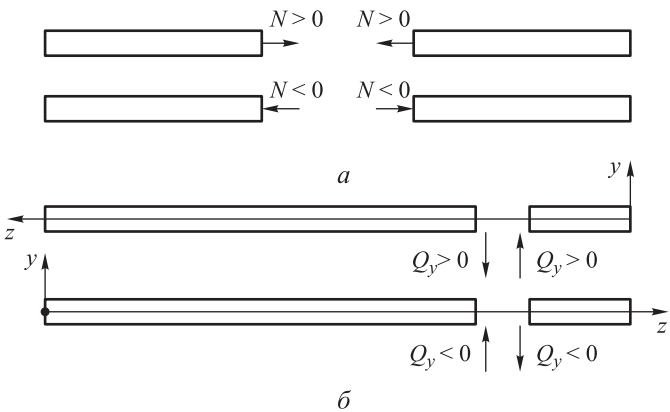


Рис. 1

К знакам эпюр поперечных сил Q удобно применять следующее правило: поперечные силы в сечении считают положительными, если их векторы стремятся поворачивать отсеченные части мысленно рассеченного стержня по ходу часовой стрелки.

Знак изгибающего момента определяют из следующего соображения: в мысленно проведенном сечении для отсеченной части стержня, находящейся в состоянии статического равновесия, в.с.ф. — изгибающий момент $M_{изг}$ компенсирует («уравновешивает») действие на эту часть стержня всех других (внешних) моментов и сил, имеющих плечи (находящихся на некоторых расстояниях) относительно сечения. При этом отсеченная часть стержня будет деформироваться (выгибаться). Деформация изгиба проявляется в том, что при прогибе одни продольные слои материала (волóкна, располагающиеся вдоль оси стержня) удлиняются, а другие — сжимаются. То, с какой стороны от оси стержня находятся сжатые, а с какой

растянутые слои (волокна), определяется направлением в.с.ф. — изгибающего момента. Принято, что эпюра $M_{изг}$ строится на сжатом волокне. По-другому можно сказать, что знак изгибающего момента на эпюре совпадает со знаком кривизны, получаемой мысленно отсеченной (рассматриваемой) частью стержня (рис. 2, *а*).

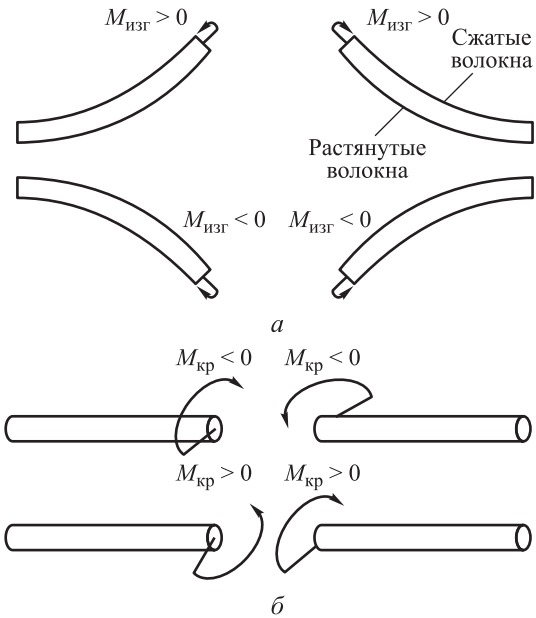


Рис. 2

Внутренний силовой фактор — крутящий момент $M_{кр}$ в сечении мысленно отсеченной части стержня считают на эпюре положительным, если для компенсации всех внешних крутящих моментов, действующих на отсеченную часть, при взгляде на плоскость поперечного сечения он имеет направление против хода часовой стрелки (рис. 2, *б*).

ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ И ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР

Изгиб

Пример 1. Рассмотрим стержневую расчетную схему, состоящую из стержня длиной l, закрепленного одним концом в заделке (консольное закрепление) и находящегося под действием некоторой силы P, приложенной к другому его концу (рис. 3). Такая расчетная схема может быть предложена, например, для упругой контактной пластины реле, изгибаемой вследствие притяжения механически воздействующего на нее якоря, и во многих других случаях.

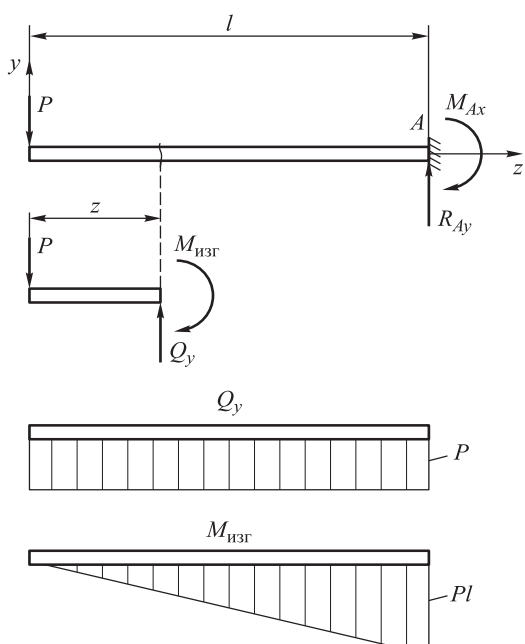


Рис. 3

Свяжем со стержнем систему координат *xyz*: ось *z* направим вдоль оси стержня, ось *y* вверх (навстречу силе *P*), а ось *x* перпендикулярно плоскости рисунка.

Такой стержень состоит из одного участка. Поместим начало системы координат в его начало (пусть это будет точка приложения силы *P*).

1. *Определение реакций опор*. В расчетной схеме действует сила *P*. Имеющаяся заделка не позволяет линейных и угловых перемещений находящегося в ней конца стержня (накладывает связи). При этом в заделке возникают реакции (в виде сил и моментов). В приведенной задаче вдоль осей *x* и *z* нет внешних воздействий на стержень, поэтому определение связанных с ними реакций можно не рассматривать. Таким образом, при действии силы *P* будем иметь силу реакции по оси *y* — это R_{Ay} и реактивный момент M_{Ax}.

Далее для расчетной схемы составим уравнения статического равновесия, из которых найдем значения R_{Ay} и M_{Ax}. Предварительно условимся любой момент, действующий в направлении против хода часовой стрелки, считать положительным, а действующий по ходу часовой стрелки — отрицательным. Уравнения, описывающие статическое равновесие стержня (расчетной схемы):

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{yi} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{Ai} = 0,$$

или в проекциях

$$-P + P_y = 0; \quad Pl - M_{Ax} = 0.$$

Решая уравнения, получаем

$$R_{Ay} = P; \quad M_{Ax} = Pl.$$

Отметим, что если бы направления реактивных силы R_{Ay} и момента M_{Ax} были выбраны противоположными принятым выше, то в результате при решении уравнений получили бы их зачения отрицательными. Это означает, что для получения их положительными (для удобства дальнейшей работы) нужно изменить их направления — это будут реальные направления.

2. *Определение в.с.ф.* Рассматриваемая стержневая расчетная схема, как было отмечено, состоит из одного участка. Применим к нему метод сечений. Мысленно отсечем от стержня сечением, расположенным по нормали к его оси, некоторую часть и рассмотрим статическое равновесие отсеченной части; выберем из двух получившихся частей ту, которая располагается слева от сечения — пусть она имеет длину z (см. рис. 3).

Отметим, что уравнения для выбранной части стержня будут иметь более простой вид, так как к ней приложено меньше внешних силовых факторов — всего одна сила P, а к правой, оставшейся, части — сила $R_{Ay} = P$ и момент $M_{Ax} = Pl$.

Для выполнения условий статического равновесия выбранной части стержня необходимо, чтобы в мысленно проведенном сечении имелась поперечная сила Q_y. Силы P и Q_y действуют по двум параллельным направлениям, т. е. имеем пару сил и для уравновешивания этой пары сил (фактически момента относительно сечения) в сечении должен быть приложен в.с.ф. — изгибающий момент $M_{\text{изг}}$ (он может быть обозначен как M_x). Наличие этого момента приводит к изгибу рассматриваемой части участка стержня. Уравнение статического равновесия для сил будет выглядеть так:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i = 0,$$

а это

$$-P + Q_y = 0,$$

откуда $Q_y = P$.

Уравнение равновесия по моментам может быть записано для любой точки на оси, но обычно его записывают для точки на оси в мысленно проведенном сечении:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{xi} = 0,$$

а это

$$Pz - M_{\text{изг}} = 0,$$

откуда $M_{\text{изг}} = Pz$.

Из полученной формулы ясно, что $M_{изг}$ изменяется по длине отсеченной части, т. е. фактически по длине участка, а значит, и по длине стержня, по линейному закону и при $z = 0$; $M_{изг} = 0$, а при $z = l$ (ведь мысленно проведенное сечение может находиться в пределах участка и у самой заделки) $M_{изг} = Pl$ — это максимальное значение момента на всей длине стержня.

После решения уравнений равновесия приступаем к построению вдоль оси стержня эпюр Q и $M_{изг}$ с учетом их знаков на эпюрах, законов изменения и вычисленных граничных значений (эти эпюры также приведены на рис. 3).

Пример 2. Для представленной расчетной схемы (рис. 4) требуется построить эпюры в.с.ф.

1. *Определение реакций опор*. Для нахождения реакций в опорах свяжем со стержнем систему координат, поместив ее начало в один из концов стержня, например в правый, и направив ось y вверх, а ось z вдоль стержня влево.

На левом конце стержня, в точке A, имеется шарнир (шарнир, как известно, в плоской расчетной схеме создает две связи, в данном случае в направлении осей y и z, с реакциями соответственно R_{Ay} и R_{Az}, причем $R_{Az} = 0$, так как в горизонтальном направлении нет внешних воздействий на стержень). Опора в точке B создает одну связь с реакцией в направлении оси y — R_{By}.

В этом случае условием статического равновесия по силам в направлении оси y: $\sum_{i=1}^{4} \vec{F}_{yi} = 0$ — будет уравнение

$$R_{Ay} - R_{By} - ql - q \cdot 2l = 0 \qquad (3)$$

(отметим, что реакциям R_{Ay} и R_{By} вначале может быть дано произвольное направление по оси y). Уравнение (3) содержит два неизвестных, и для их определения привлечем второе уравнение статического равновесия.

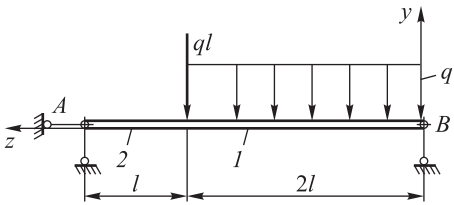


Рис. 4

Вторым уравнением статического равновесия по моментам будет $\sum_{i=1}^{3} \vec{M}_{Ai} = 0$ — сумма моментов от всех внешних сил, приложенных к стержню (в том числе и от сил — реакций в опорах, поскольку они также являются внешними силами по отношению к стержню), обычно относительно одной из опор, например точки A (в принципе, относительно любой точки стержня). Учитывая, что сила R_{Ay} проходит через точку A и поэтому не создает относительно нее момент (так как не имеет плеча), получим уравнение для моментов

$$-ql \cdot l - q \cdot 2l \cdot 2l - R_{By} \cdot 3l = 0,$$

откуда $R_{By} = -5ql/3$. Отметим, что при определении плеча для силы, создаваемой распределенной нагрузкой q, эту силу рассматривают как сосредоточенную и приложенную в центре участка $2l$, на котором эта нагрузка распределена; плечо у этой силы $2l$ относительно точки A. Далее из уравнения для сил (3) находим $R_{Ay} = 4ql/3$.

Отрицательное значение R_{By} получили как результат первоначального произвольного выбора направления реакций и теперь (после определения всех неизвестных) для удобства дальнейшей работы целесообразно изменить знак y R_{By} и одновременно поменять направление действия этой силы на противоположное (т. е. далее будем считать, что $R_{By} = 5ql/3$ и направлена эта сила теперь будет вверх, в положительном направлении оси y — это и есть ее реальное направление) и отразить это на расчетной схеме (рис. 5, *а*).

Для промежуточной проверки правильности определения реакций опор можно устно подсчитать, что в отрицательном направлении оси y действуют совокупно силы нагрузки, равные $3ql$, которые вызывают реактивные силы, также в совокупности равные $R_{Ay} + R_{By} = 3ql$, т. е. при таких значениях реакций получили статически уравновешенную по силам и моментам расчетную схему (рис. 5, *б*).

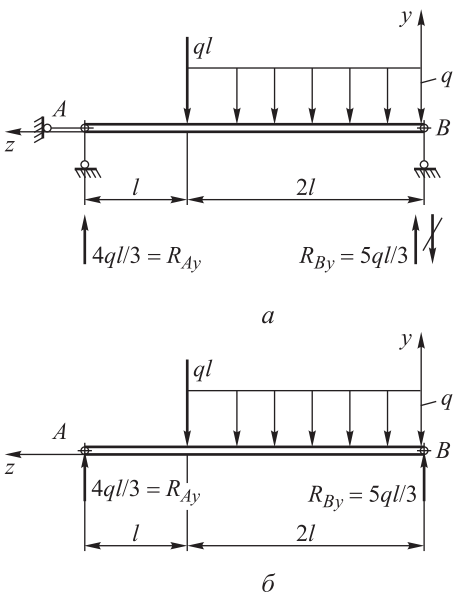


Рис. 5

2. *Определение в.с.ф.* Анализ вида расчетной схемы позволяет выделить в ней два участка. Рассмотрим статическое равновесие каждого участка последовательно справа налево (см. рис. 4).

Участок 1. Мысленно отсечем часть стержня и поместим в начало участка систему координат: ось y вверх, а ось z — по оси стержня (рис. 6). Пусть длина отсеченной части будет равна z. Рассматривая ее состояние равновесия, устанавливаем, что в поперечном сечении должны действовать сила Q_y и момент M_x. Запишем уравнения статического равновесия:

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{F}_{yi} = 0; \quad Q_y - qz + 5ql/3 = 0,$$

откуда

$$Q_y = qz - 5ql/3; \qquad \sum_{i=1}^{3} \vec{M}_i = 0.$$

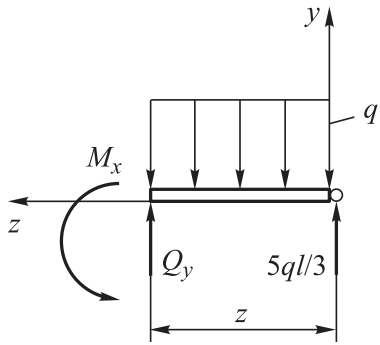


Рис. 6

В последнем уравнении моменты будем рассматривать относительно сечения. Сила Q_y, находящаяся в этом сечении, момента относительно него не создает (так как не имеет плеча). Момент от распределенной нагрузки q будет выражаться произведением равнодействующей силы от этой нагрузки qz и плеча $z/2$ данной силы относительно сечения, также относительно сечения момент будет создавать сила $5ql/3$ на плече z. Для уравновешивания этих моментов в сечении должен присутствовать в.с.ф. — момент M_x. Уравнение моментов будет иметь вид

$$M_x - qz \cdot z/2 \; + \; (5ql/3) \cdot z = 0,$$

откуда

$$M_x = qz^2/2 \; - \; 5qlz/3.$$

Вид выражений для Q_y и M_x показывает, что на участке *1* поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент — по квадратичному. Для точек на границах участка получим:

при $z = 0$

$$Q_y = -5ql/3; \quad M_x = 0;$$

при $z = 2l$

$$Q_y = ql/3; \; M_x = -4ql^2/3.$$

Знак минус у значения момента при $z = 2l$ указывает на то, что момент реально направлен по ходу часовой стрелки (значит, направление момента нужно изменить на противоположное), т. е. сжатое волокно будет находиться сверху, над осью стержня. Отметим, что момент M_x в сечении фактически компенсирует действие на сечение

всех внешних моментов. По его направлению можно судить, в какую сторону будет прогибаться рассматриваемая отсеченная часть и где при этом будут находиться сжатые волокна (на которых строится эпюра M_x).

Далее строим эпюры Q_y и M_x, имея в виду, что график параболы — эпюры M_x всегда направлен своей выпуклостью навстречу стрелкам распределенной нагрузки q (в этом можно убедиться, проведя соответствующие вычисления). При $z = 0$ было получено значение $Q_y = -5ql/3$, при этом сила Q_y была сонаправлена с осью y. Можно изменить направление силы на противоположное (противоположное направлению оси y) и при этом изменить знак Q_y, считая, что $Q_y = 5ql/3$. Имея в виду, что участок отсекается справа и сила $Q_y = 5ql/3$ имеет направление, противоположное направлению оси y, при построении эпюры Q_y эта сила должна изображаться как отрицательная в начале участка (в точке B). Также отметим, что эпюра Q_y в пределах рассматриваемого участка пересекает ось z (значения Q_y на границах участка имеют разные знаки). Найдем значение координаты z, при котором $Q_y = 0$. Подставив это значение в уравнение для Q_y, получим $z = 5l/3$. Сила Q_y является производной по z для изгибающего момента M_x, т. е. $Q_y = dM_x/dz$ (достаточно продифференцировать по z выражение для M_x).

Зная, что в том месте, где производная Q_y равна нулю ($Q_y = 0$ при $z = 5l/3$), функция M_x имеет экстремум, в нашем случае — максимум, найдем его подстановкой $z = 5l/3$ в выражение для момента. Получим $M_x = -25ql^2/18$ — при первоначально принятом направлении момента (при котором составлялось уравнение равновесия) и с учетом в дальнейшем изменения этого направления на противоположное данная точка на эпюре M_x будет находиться сверху, над осью z (максимальное значение момента отмечаем на эпюре), так как при окончательно установленном направлении момента M_x в сечении сжатое волокно будет находиться сверху. Эпюры Q_y и M_x для участка *1* представлены на рис. 7.

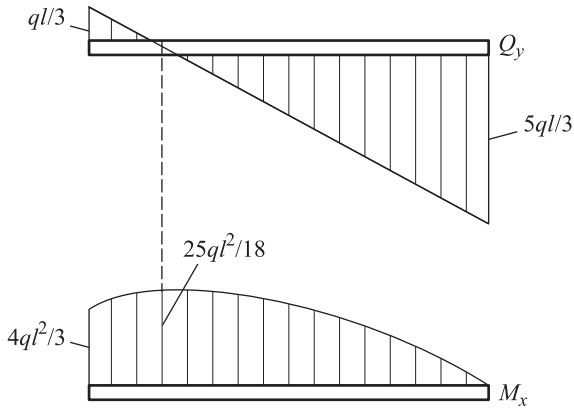


Рис. 7

Участок 2. Опять мысленно отсечем часть стержня, проведя сечение в любом месте между точкой приложения сосредоточенной силы ql и опорой A. Далее (как и на участке *1* — см. рис. 4) поместим в начало участка начало системы координат (ось y — вверх, а ось z — по оси стержня) и опять длину отсеченной части участка будем считать равной z (рис. 8).

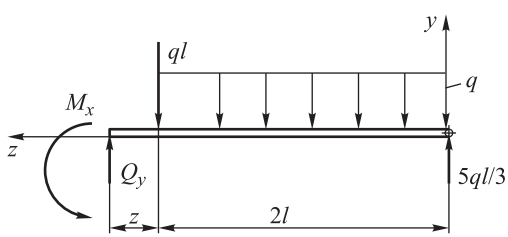


Рис. 8

Теперь рассмотрим равновесие отсеченной части (поскольку помним, что мысленно отсеченная часть является частью стержня, находящегося в состоянии равновесия). Для обеспечения равновесия в проведенном поперечном сечении должны присутствовать в.с.ф. — поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x.

После проведения такого анализа сил и моментов запишем уравнения статического равновесия для отсеченной части:

$$\sum_{i=1}^{4} \vec{F}_{yi} = 0; \quad \sum_{i=1}^{4} \vec{M}_i = 0.$$

Уравнение равновесия по силам запишется в виде

$$Q_y - q \cdot l - q \cdot 2l + 5ql/3 = 0,$$

откуда

$$Q_y = 4ql/3.$$

Прежде чем записать уравнение равновесия по моментам, как и ранее, отметим, что сила Q_y сама располагается в сечении и поэтому момента относительно него не создает (так как не имеет плеча). Момент от распределенной нагрузки q относительно сечения будет представлен в виде сосредоточенной силы $2ql$ (равной произведению нагрузки q и длины $2l$ того отрезка стержня, на котором она распределена, и приложенной в центре этого отрезка), умноженной на ее плечо $z + l$. Получим уравнение

$$-M_x - ql \cdot z - q \cdot 2l \cdot (z + l) + 5ql \cdot (z + 2l)/3 = 0,$$

откуда

$$M_x = -4qlz/3 + 4ql^2/3.$$

Видим, что на этом участке сила Q_y постоянна, эпюра Q_y — прямая, параллельная оси, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. При $z = 0$ (начало участка *2*) $M_x = 4ql^2/3$ и при $z = l$ (конец участка *2*) $M_x = 0$, т. е. в шарнире (точка *A*), как и положено, момент равен нулю. В начале участка эпюра моментов претерпевает излом.

Анализ эпюр показывает, что самый большой в.с.ф. — изгибающий момент $M_x = 25ql^2/18$ имеется в сечении, располагающемся на расстоянии $5l/3$ от опоры *B* стержня. Эпюры Q_y и M_x для участка *2*, а также результирующие эпюры представлены на рис. 9 *а*, *б*.

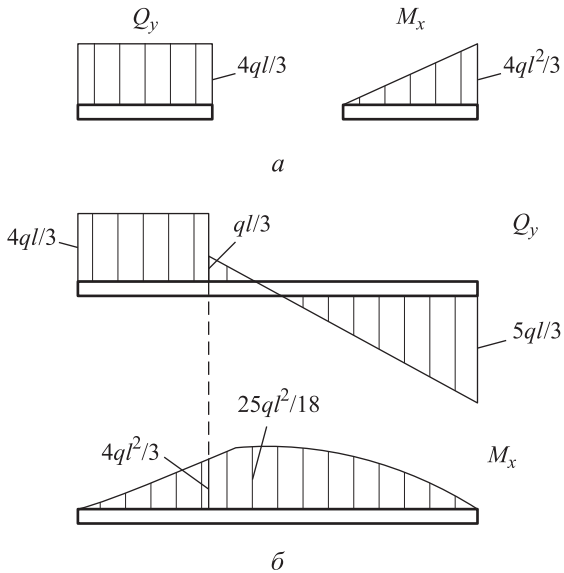


Рис. 9

Эпюры в.с.ф. лучше всего строить, используя принцип суперпозиции, согласно которому на расчетной схеме в случае одновременного действия нескольких внешних силовых факторов (сил, моментов, распределенных нагрузок) результирующие эпюры (эпюру сил, эпюру моментов) от их действия получают как результат сложения по участкам соответствующих эпюр от каждого отдельно рассматриваемого внешнего силового фактора. Указанное сложение, базирующееся на принципе независимости результатов действия внешних нагрузок, возможно только при принятии факта неизменности начальной формы и размеров стержневых элементов расчетной схемы (принцип начальных размеров).

Такой способ построения эпюр в большинстве случаев значительно упрощает решение задачи и получение результата, так как при этом уравнения статического равновесия для определения в.с.ф. проще по сравнению с уравнениями, получающимися при рассмотрении равновесия частей (мысленно отделенных) расчетной схемы, нагруженных даже небольшой совокупностью действующих вместе внешних силовых факторов (уравнения статического равновесия могут

получаться сравнительно громоздкими). Так, стержневую схему из этого примера с предварительно определенными для нее реакциями опор R_{Ay} и R_{By} (учитываем, что реакции опор в расчетной схеме также являются внешними силовыми факторами) можно представить в виде стержня (см. рис. 5, *б*), который нагружается последовательно отдельными силовыми факторами: распределенной нагрузкой q (рис. 10), силой $5ql/3$ (рис. 11) и силой ql (рис. 12). Отсекая, в соответствии с методом сечений, от стержня части и рассматривая их

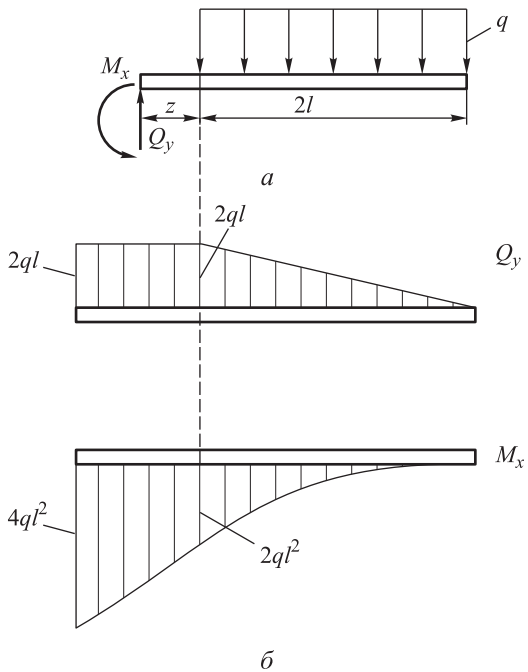


Рис. 10

равновесие (идя при этом по стержню от участка к участку последовательно справа налево), получаем для расчетной схемы на рис. 10, *а*, состоящей из двух участков, на участке *1*: уравнение сил $Q_y = q \cdot z$ (линейная зависимость от z) и уравнение моментов

$$M_x = q \cdot z \cdot (z/2), \text{ т. е. } M_x = qz^2/2$$

(квадратичная зависимость от z). На границах участка *1*: при $z = 0$ $Q_y = 0,\ M_x = 0;$ при $z = 2l$ $Q_y = 2ql,\ M_x = 2ql^2.$

Для участка *2* расчетной схемы (см. рис. 10, *а*) будем иметь уравнения

$$Q_y = q \cdot 2l;$$

$$M_x = q \cdot 2l \cdot (z + 1), \quad \text{или} \quad M_x = q \cdot 2l \cdot z + 2ql^2.$$

На границах участка *2*: при $z = 0$ $Q_y = 2ql,\ M_x = 2ql^2;$ при $z = l$ $Q_y = 2ql,\ M_x = 4ql^2.$

Видим, что на участке *1* сила Q_y изменяется как функция от z по линейному закону, а момент M_x — по квадратичному; на участке *2* сила Q_y постоянна, а момент изменяется по линейному закону. Соответствующие эпюры для расчетной схемы, приведенной на рис. 10, *а*, легко построить, они представлены на рис. 10, *б*.

Для статического равновесия расчетной схемы, приведенной на рис. 11, *а*, состоящей фактически из одного участка длиной $3l$, получим уравнение сил $Q_y - 5ql/3 = 0,$ и уравнение моментов $-M_x + (5ql/3)z = 0;$ при $z = 0$ $Q_y = 5ql/3,\ M_x = 0;$ при $z = 3l$ $Q_y = 5ql/3,\ M_x = 5ql^2.$ Эпюры Q_y и M_x изображены на рис. 11, *б*.

Для статического равновесия расчетной схемы, представленной на рис. 12, *а*, состоящей из одного участка длиной l, будем иметь уравнение сил $Q_y = q \cdot l$ и уравнение моментов $M_x = ql \cdot z;$ при $z = 0$ $Q_y = ql,\ M_x = 0;$ при $z = 1$ $Q_y = ql,\ M_x = ql^2.$ Эпюры приведены на рис. 12, *б*.

Для расчетной схемы (см. рис. 4) при принятом ранее проходе по участкам стержня справа налево нет эпюр от силы $R_{Ay},$ однако роль этой реакции состоит в том, что она в полной мере участвует в поддержании стержневой системы в состоянии равновесия, как и реакция $R_{By}.$

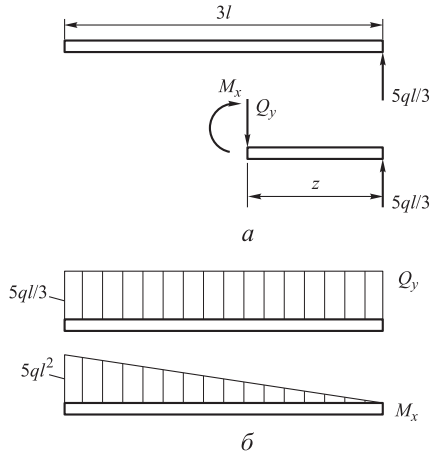

3l
5ql/3
M_x
Q_y
z
5ql/3
а
5ql/3
Q_y
$5ql^2$
M_x
б

Рис. 11

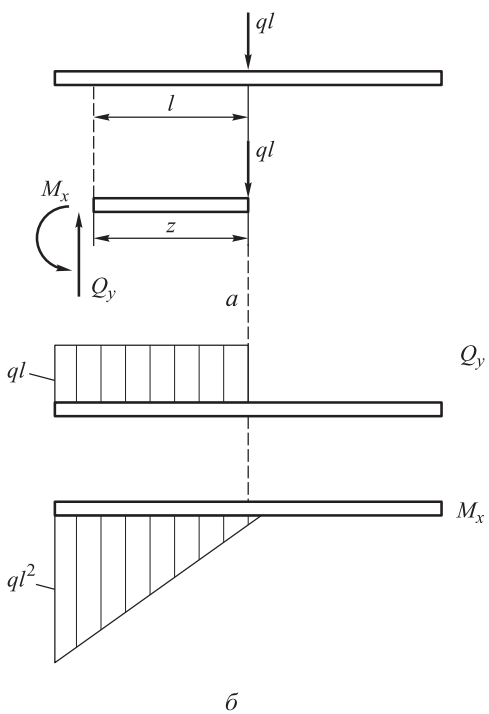

ql
l
ql
M_x
z
Q_y
а
ql
Q_y
M_x
ql^2
б

Рис. 12

Складывая ординаты на эпюрах соответственно для Q_y и M_x на концах участков и учитывая законы изменения внутренних сил и моментов на этих участках, получаем результирующие эпюры Q_y и M_x, точно такие же, как в этом примере. Видим, что результирующая эпюра Q_y пересекает ось z на первом участке $(Q_y = 0)$ — это говорит о наличии экстремума на результирующей эпюре M_x (в нашем случае максимума) в точке пересечения. Значение координаты z пересечения эпюры Q_y с осью $(Q_y = 0)$ находим из уравнения равновесия по силам, записанного для отсеченной части на первом участке исходной расчетной схемы, если в этом уравнении силу Q приравнять нулю. Далее для установленной координаты z вычисляем значения моментов по уравнениям, соответствующим эпюрам на рис. 10, *б* и 11, *б*, и, суммируя эти значения, определяем $M_{x\max}$ на результирующей эпюре.

Отметим, что сложению эпюр на участках соответствует сложение уравнений равновесия на них для простейших расчетных схем (см. рис. 10, *а*; 11, *а* и 12, *а*), на которые была разбита исходная сравнительно сложная расчетная схема. Такое сложение уравнений приводит к уравнениям равновесия каждого из участков исходной расчетной схемы. Результирующие эпюры при решении задачи с использованием принципа суперпозиции повторяют такие же эпюры Q_y и M_x, полученные ранее и представленные на рис. 9.

Анализ и исследование зависимостей между внешней поперечной нагрузкой и в.с.ф. — поперечной силой Q и изгибающим моментом M дают возможность сформулировать следующие положения, которыми удобно руководствоваться при построении и особенно при проверке эпюр.

1. На участке, свободном от нагрузки, поперечная сила не изменяется, а изгибающий момент изменяется линейно.

2. На участке, нагруженном равномерно распределенной нагрузкой q, поперечная сила изменяется линейно, а эпюра изгибающего момента — парабола, обращенная выпуклостью навстречу направлению нагрузки.

3. В сечении, где начинается (оканчивается) распределенная нагрузка (и в этом сечении не приложены сосредоточенная сила или

момент), на эпюре поперечных сил наблюдается излом, а эпюра изгибающих моментов плавно, без излома, переходит из прямолинейной в параболическую (прямая, касательная к параболе).

4. В сечении, где приложена внешняя сосредоточенная сила, на эпюре поперечных сил наблюдается скачок на значение приложенной поперечной силы, а на эпюре изгибающих моментов — излом выпуклостью навстречу силе.

5. В сечении, где приложен внешний сосредоточенный изгибающий момент, эпюра изгибающих моментов имеет скачок на значение приложенного момента, а эпюра поперечных сил не изменяется.

6. В сечении, где линейно изменяющаяся эпюра поперечных сил пересекает ось стержня, изгибающий момент имеет экстремальное (максимальное или минимальное) значение (в пределах рассматриваемого участка).

7. На концах стержня поперечная сила и изгибающий момент соответственно равны приложенным в этих местах внешним сосредоточенной силе и моменту (паре сил).

8. Если на некотором участке $Q > 0$, то изгибающий момент M на нем возрастает (слева направо); если $Q < 0$, то изгибающий момент M на этом участке убывает; если $Q = 0$, то момент M постоянен.

Основные теоретические и методологические положения, приведенные в этом разделе, а также данные восьми пунктов фактически представляют собой методические указания для проведения самостоятельной работы по построению и проверке правильности полученных эпюр в.с.ф.

Большое число конструкций элементов приборных устройств может быть представлено в виде плоских и пространственных многостержневых расчетных схем (плоских и пространственных рам).

Пример 3. Рассмотрим построение эпюр для плоской стержневой расчетной схемы (рамы).

1. *Определение реакций опор*. Предварительно свяжем со стержневой системой (рис. 13) систему координат xyz, поместив ее начало, например, в шарнирную опору (точка B). Ось y направим вверх, а ось z — справа налево по стержню. Анализ расчетной схемы (расположения стержней и направления внешних нагрузок) показывает, что в шарнирной опоре B будут возникать две реакции R_{By} и R_{Bz},

в опоре A возникает одна реакция R_{Ay} (пока выберем их направления произвольными).

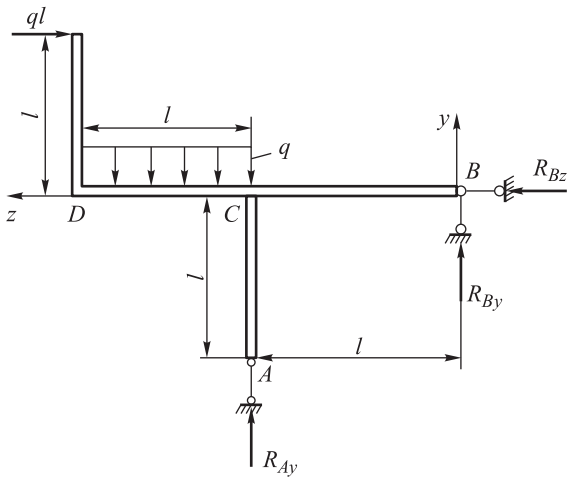


Рис. 13

Запишем для полученной расчетной схемы уравнения статического равновесия:

по силам

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{F}_{yi} = 0; \quad -ql + R_{Ay} + R_{By} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{zi} = 0; \quad -ql + R_{Bz} = 0; \quad R_{Bz} = ql;$$

по моментам (отметим, что статическое равновесие по моментам выгоднее рассматривать относительно точки, в которой приложено несколько сил, тогда моменты от них будут равны нулю, так как указанные силы относительно этой точки не имеют плеч (в нашем случае это точка B))

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{M}_{Bx} = 0; \quad -ql \cdot l + ql \cdot (l + l/2\ ) - R_{Ay} \cdot l = \ 0.$$

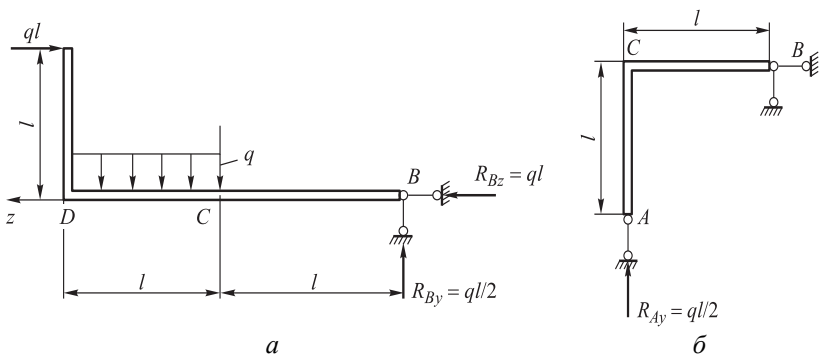
Получаем

$$R_{Ay} = -ql + 3ql/2; \quad R_{Ay} = ql/2.$$

Подставляя в уравнение для сил, находим

$$-ql + ql/2 + R_{By} = 0; \quad R_{By} = ql/2.$$

2. *Определение в.с.ф.* Предварительный анализ исходной расчетной схемы показывает, что использовать метод сечений, рассматривая статическое равновесие при мысленном отделении частей на участках стержней, из которых состоит схема, удобнее, отсекая части и при этом продвигаясь по стержням слева направо к точке B. Также отметим, что на основании принципа начальных размеров и принципа независимости результатов действия сил исходная расчетная схема в состоянии статического равновесия может быть представлена в виде двух более простых расчетных схем (рис. 14, *а, б*).



а *б*

Рис. 14

Видим, что в исходной схеме имеется узел (точка C), в котором сходятся стержни, отнесенные к двум разным простым схемам, и что один из участков (CB) у этих схем общий (заканчивающийся опорой B).

Схема на рис. 14, *а* в свою очередь может быть представлена в виде двух схем (если разделить ее по нагрузкам): рис. 15, *а*, *б*.

Таким образом, для определения в.с.ф. в исходной, сравнительно сложной расчетной схеме (см. рис. 13) проще определить их в простых расчетных схемах (см. рис. 14, *б*; 15, *а*, *б*).

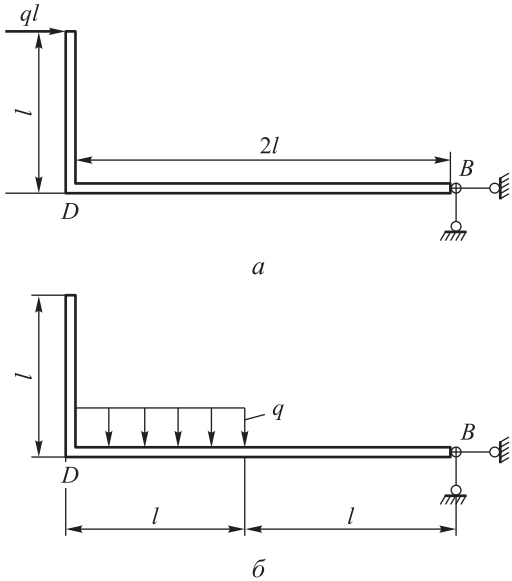


Рис. 15

Стержневая система на рис. 14, *б* имеет два участка. Первый участок — вертикальный. Мысленно отсечем часть первого участка и рассмотрим ее статическое равновесие (рис. 16):

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{yi} = 0; \quad -N + ql/2 = 0; \quad N = ql/2.$$

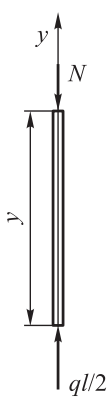


Рис. 16

Чтобы перейти на второй, горизонтальный, участок рассмотрим в.с.ф. в сечении, находящемся в конце первого, вертикального, участка (в сечении, очень близком к месту перехода одного участка в другой). Две части стержня — отсеченная и оставшаяся — действуют друг на друга в.с.ф. — равными по модулю, но противоположными по направлению силами $ql/2$ (рис. 17, *а*).

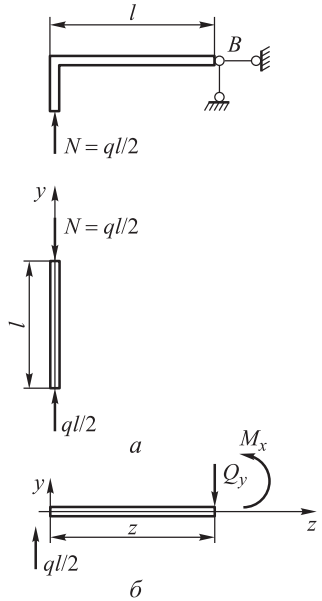


Рис. 17

После того как значения в.с.ф., соответствующие статическому равновесию части, отсеченной на первом участке, для конца этого участка определены ($N = ql/2$), при мысленном проведении сечения на втором, горизонтальном, участке становится возможным не рассматривать получающуюся сравнительно сложную по конфигурации отсекаемую часть, а рассмотреть только мысленно отсекаемую часть длиной z второго участка (рис. 17, *б*), но с приложенными в его начале в.с.ф. — в нашем случае силой $ql/2$, перешедшей с первого участка (сила $ql/2$ из продольной на первом участке начиная с места соединения вертикального и горизонтального стержней становится поперечной силой, приложенной в начале второго участка, как будто внешняя сила $ql/2$ из начала первого участка была перенесена в начало второго участка по линии своего действия).

Для статического равновесия отсеченной части второго участка необходимо наличие в сечении силы Q_y и момента M_x, которые могут быть определены из соответствующих уравнений:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{yi} = 0; \;\; -Q + ql/2 = 0,$$

откуда

$$Q = ql/2;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{xi} = 0; \;\; M - (ql/2) \cdot z = 0,$$

откуда

$$M = qlz/2;$$

при $z = 0$ $M_x = 0$; при $z = 2l$ $M_x = ql^2/2$.

Эпюры, полученные для рассматриваемой простой расчетной схемы (см. рис. 14, *б*), приведены на рис. 18.

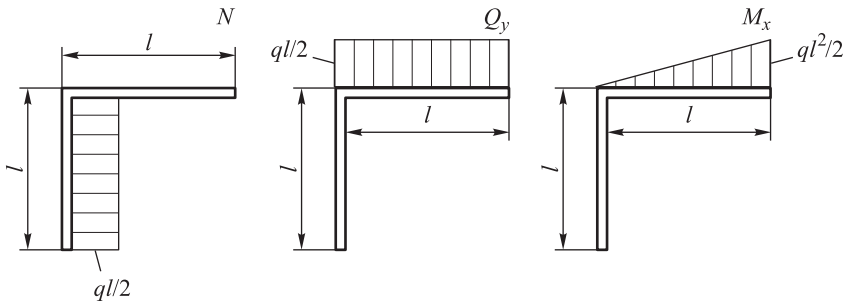


Рис. 18

Рассмотрим простую расчетную схему, представленную на рис. 15, *а*. Схема имеет два участка. При решении задачи определения в.с.ф. направление мысленного отсекания частей выберем слева направо. Отсечем часть от первого, вертикального, участка и рассмотрим ее статическое равновесие (рис. 19), для получения которого необходимо, чтобы в сечении присутствовали поперечная сила Q_z и изгибающий момент M_x.

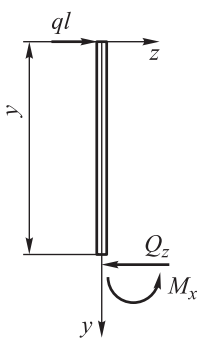


Рис. 19

Уравнения статического равновесия будут иметь вид:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{zi} = 0; \quad -ql + Q_z = 0; \quad Q_z = ql.$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{xi} = 0; \quad -ql \cdot y + M_x = 0; \quad M_x = qly;$$

при $y = 0$ (начало участка) $M_x = 0;$ при $y = 1$ $M_x = ql^2$.

Чтобы перейти на второй, горизонтальный, участок длиной $2l$, необходимо предварительно установить, какие сила и момент (и их значения) имеются в конце первого участка и, следовательно, перейдут на начало второго участка. Мысленно проведем сечение в конце первого участка (рис. 20) и рассмотрим в.с.ф. — силы и моменты в сечении.

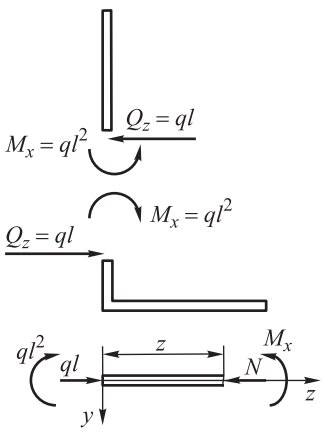


Рис. 20

Сила ql — поперечная на первом участке переходит в продольную силу ql, в начале второго участка также присутствует изгибающий момент ql^2.

Отсечем часть второго участка и рассмотрим ее статическое равновесие. Уравнения статического равновесия имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{zi} = 0; \quad +ql - N = 0; \; N = ql;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{xi} = 0; \;\; M_x = ql^2.$$

Эпюры для расчетной схемы (см. рис. 15, *а*) представлены на рис. 21.

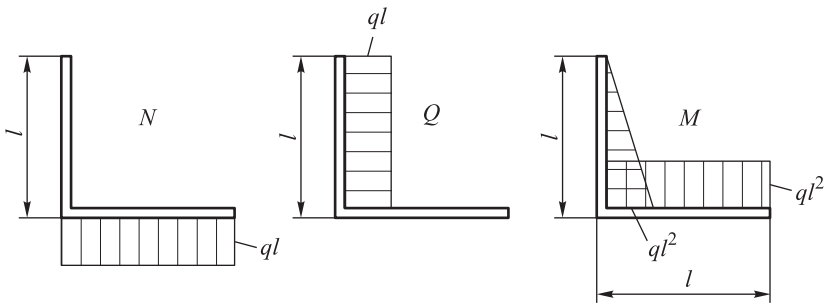


Рис. 21

Рассмотрим задачу определения в.с.ф. для представленной на рис. 15, *б* расчетной схемы, состоящей из трех участков: одного вертикального и двух горизонтальных. На вертикальном участке нет нагрузки и поэтому на нем нет в.с.ф., а следовательно, нет эпюр. Отсечем часть длиной *z* на втором, горизонтальном, участке и рассмотрим ее статическое равновесие (рис. 22).

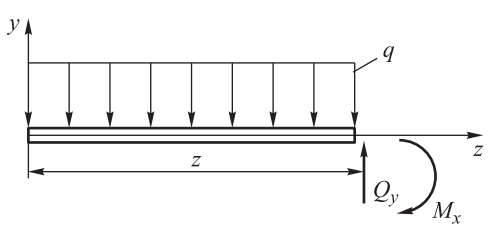


Рис. 22

Уравнения статического равновесия будут иметь вид (направления моментов рассматриваем относительно сечения):

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{yi} = 0; \quad -qz + Q_y = 0; \quad Q_y = qz;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{xi} = 0; \quad qz \cdot (z/2) - M_{xi} = 0;$$

$$M_x = (qz^2)/2;$$

при $z = 0$ (начало участка) $Q_y = 0$, $M_x = 0$; при $z = 1$ $Q_y = ql$, $M_x = ql^2/2$.

Отметим, что закон изменения силы Q_y по длине участка — линейный, а закон изменения момента M_x — квадратичный. Далее рассмотрим третий участок схемы. Мысленно проведем на нем сечение и проанализируем статическое равновесие отсеченной части (рис. 23).

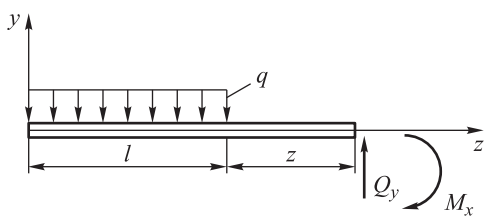


Рис. 23

Уравнения статического равновесия для нее такие:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{yi} = 0; \quad -ql + Q_y = 0; \quad Q_y = ql;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{xi} = 0; \quad ql(l/2 + z) - M_x = 0; \quad M_x = ql^2/2 + qlz;$$

при $z = 0$ (начало участка) $M_x = ql^2/2$; при $z = 1$ $M_x = 3ql^2/2$. Эпюры для схемы (см. рис. 15, *б*) представлены на рис. 24.

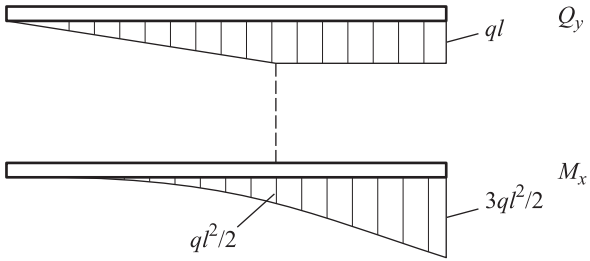


Рис. 24

Отметим, что эпюра на втором участке — парабола и она всегда имеет выпуклость навстречу распределенной на нем нагрузке q, что может быть легко подтверждено вычислениями.

Теперь, по принципу суперпозиции, можно провести сложение соответствующих эпюр по всем участкам всех расчетных схем (см. рис. 14, 15, *а*, *б*) и получить результирующие эпюры для исходной расчетной схемы (см. рис. 13). Эти эпюры представлены на рис. 25.

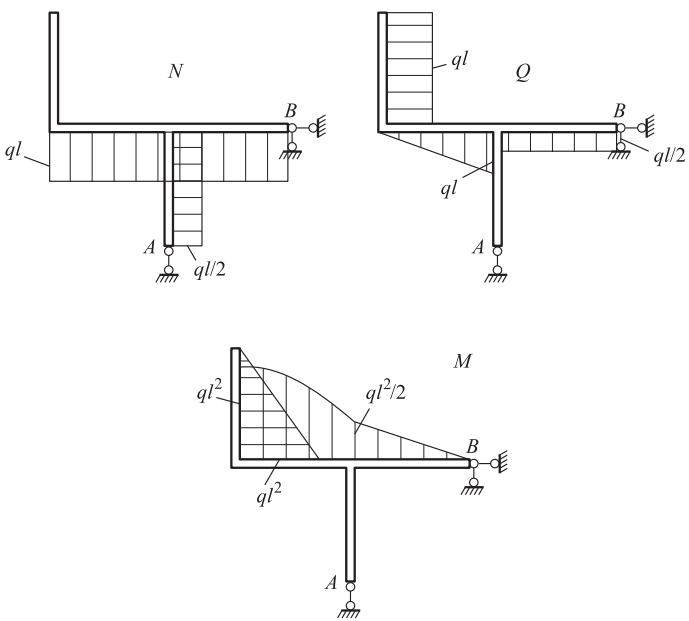


Рис. 25

Подводя итог, отметим, что решение трех простейших задач оказывается более приемлемым и менее трудоемким, чем непосредственное решение исходной задачи.

Пример 4. Довольно широкое распространение в конструкциях первичных преобразователей информационных приборов, а также в других приборных конструкциях находят стержневые элементы с изогнутой осью. Так, во многих барометрических приборах в качестве упругих чувствительных элементов применяют мембранные коробки с выкачанным из них полностью или частично газом. Для функционирования такой коробки (ее сжатия или расширения под действием измеряемого внешнего давления) одну из ее мембран предварительно оттягивают от другой мембраны, для чего может быть применена изогнутая плоская пружина (рис. 26, *а*); это также позволяет вести настройку прибора, обеспечивает температурную компенсацию. Расчетная схема такой пружины, нагруженной силой P (от мембранной коробки), представлена на рис. 26, *б* в виде двух участков: прямолинейного (участок *1*) и криволинейного (участок *2*).

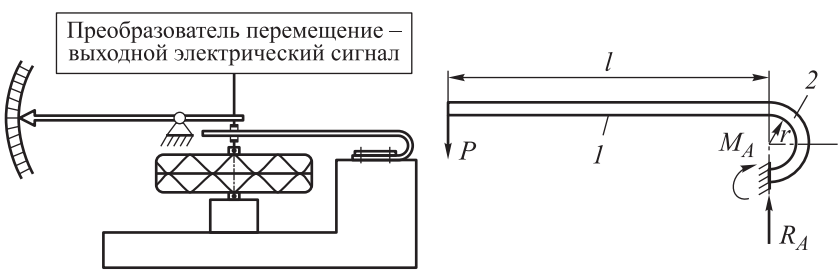


Рис. 26

При проведении конструкторских расчетов пружины требуется построить эпюры в.с.ф. для предложенной схемы ее нагружения и закреплении.

1. *Определение реакций опоры*. В заделке возникают реактивная сила R_A и реактивный момент M_A, которые находим из уравнений статического равновесия расчетной схемы:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i = 0; \quad -P + R_A = 0; \quad R_A = P;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_A = 0; \quad Pl - M_A = 0; \quad M_A = Pl.$$

2. *Определение в.с.ф.* Расчетная схема пружины содержит два стержневых участка — прямолинейный и криволинейный. При решении задачи с использованием метода сечений будем мысленно отсекать части от стержней слева направо.

Свяжем прямоугольную систему координат с первым, прямолинейным, участком, поместив ее начало в начало участка. Мысленно проведя поперечное сечение в некотором месте в пределах участка, рассмотрим статическое равновесие отсеченной части (рис. 27).

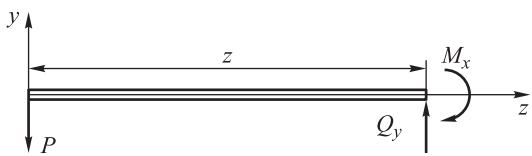


Рис. 27

Найдем в.с.ф. — Q_y и M_x, необходимые для его поддержания, из уравнений

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{yi} = 0; \quad -P + Q_y = 0; \quad Q_y = P;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{xi} = 0; \quad -M_x + P \cdot z = 0; \quad M_x = Pz.$$

Видим, что в пределах участка сила Q_y остается постоянной, а момент M_x изменяется по линейному закону, и в конечном сечении участка при $z = l$ имеем $M_x = Pl$.

Чтобы перейти к рассмотрению статического равновесия второго, криволинейного, участка, необходимо установить силы и моменты, действующие в поперечном сечении в его начале — это фактически поперечная сила $Q_y = P$ и изгибающий момент $M_x = Pl$, определенные для конца первого участка, так как эти начало и конец совпадают (рис. 28).

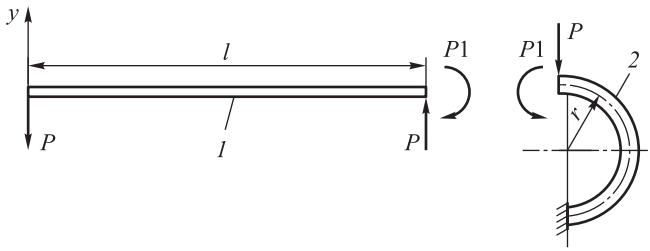


Рис. 28

На втором, криволинейном, стержневом участке для решения задачи целесообразно использовать полярную систему координат, поместив ее начало в центр окружности этого участка. Мысленно в произвольном месте участка проведем сечение, которое характеризуется некоторым углом φ (рис. 29).

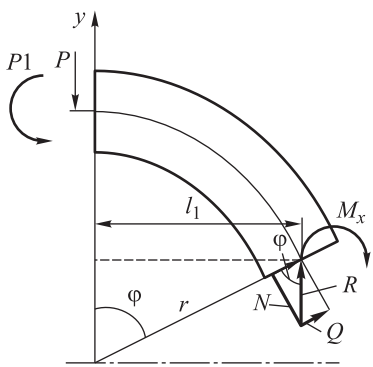


Рис. 29

Для уравновешивания отсеченной части по силам в сечении должна быть приложена сила R, $R = P$. Сила R направлена вверх под углом φ к плоскости проведенного сечения и может быть представлена в виде двух составляющих: нормальной по отношению к сечению силы $N = R\sin\varphi$ и располагающейся в его плоскости поперечной силы $Q = R\cos\varphi$.

Для уравновешивания отсеченной части по моментам в мысленно проведенном сечении также должен быть приложен момент M_x, так как сила P относительно сечения создает момент, имея

плечо $l_1 = r\sin\varphi$; при этом принимаем, что поперечные размеры сечения много меньше, чем радиус r:

$$\sum_{i=1}^{3}\vec{M}_i = 0; \quad Pl + Pl_1 - M_x = 0; \quad M_x = P(l + r\cdot\sin\varphi).$$

Таким образом, для второго участка при $\varphi = 0$ получим (через сечение в начале участка проходит ось y) $N = 0$; $Q = R = P$; $M_x = Pl$, а при $\varphi = \pi/2$ будем иметь $N = R = P$, $Q = 0$, $M_x = P(l + r)$; в заделке при $\varphi = \pi$ $N = 0$, $Q = -R = -P$; $M_x = Pl$.

Результирующие эпюры представлены на рис. 30.

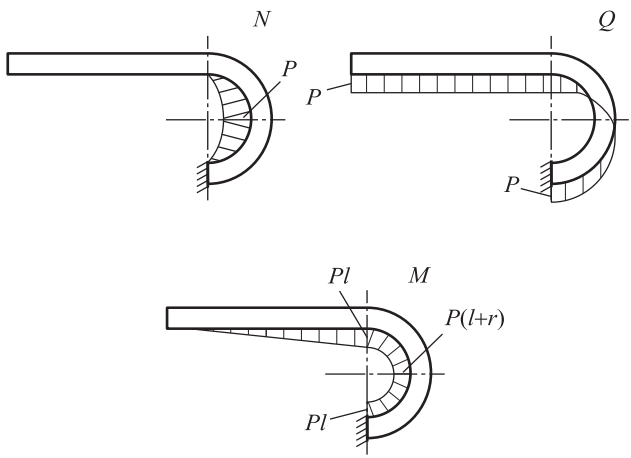


Рис. 30

Пример 5. Решим задачу построения эпюр в.с.ф. для пространственной стержневой системы на примере стержневого рычажного механизма передачи силы P от некоторого чувствительного элемента (например, мембранной коробки, находящейся под действием измеряемого давления) первичного измерительного преобразователя к некоторому вторичному преобразователю или исполнительному органу (например, заслонке, шторке и т. п.) в контуре управления некоторым процессом. Возможная расчетная схема такой пространственной стержневой системы приведена на рис. 31.

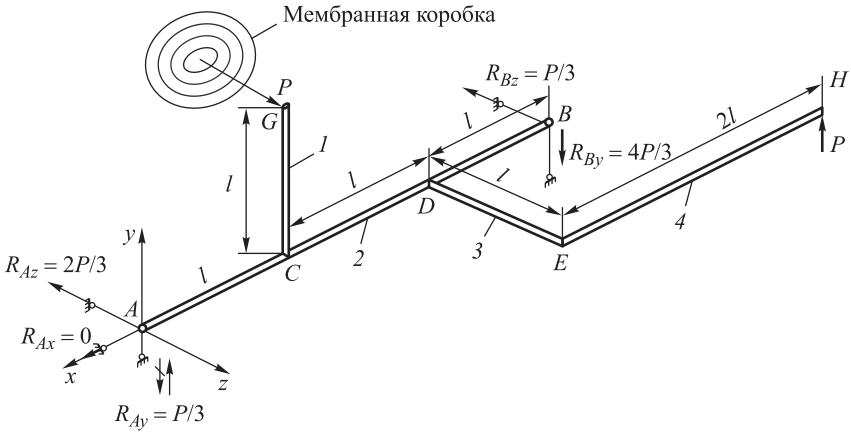


Рис. 31

1. *Определение реакций опор*. При действии силы P от чувствительного элемента на рычаг *1* стержень *2* поворачивается в опорах (шарнирах) A и B и через рычаги *3* и *4* действует на исполнительный орган (в точке H) также с силой P (в свою очередь исполнительный орган по третьему закону Ньютона действует на рычаг *4* тоже с силой P).

Для определения реакций опор поместим систему координат в одну из них (например, в A), при этом направим ось y вверх, ось x — по оси стержня AB влево, а ось z — по направлению оси стержня *3*. Направим вначале реакции R_{Ay} и R_{By} вниз, в направлении, противоположном направлению оси y, а R_{Az} и R_{Bz} в направлении, противоположном направлению оси z. Определим реакции из уравнений статического равновесия расчетной схемы:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{xi} = 0;$$

поскольку внешних нагрузок по оси x нет, то $R_{Ax} = 0$;

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{F}_{yi} = 0; \quad -R_{Ay} - R_{By} + P = 0; \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{F}_{zi} = 0; \quad -R_{Az} - R_{Bz} + P = 0; \tag{5}$$

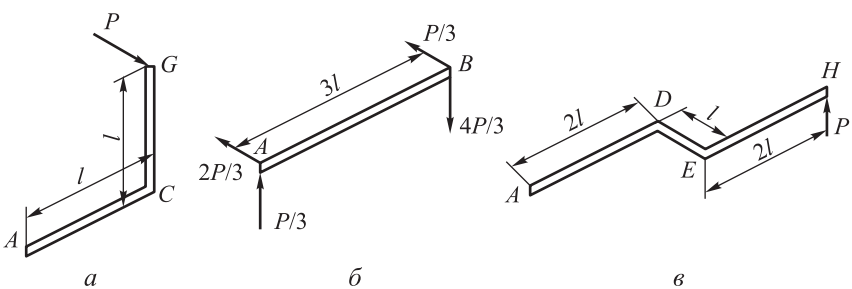
$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{Axi} = 0; \quad -P \cdot l + P \cdot l = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{Ayi} = 0; \quad -P \cdot l + R_{Bz} \cdot 3 \cdot l = 0; \quad R_{Bz} = P/3;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{Azi} = 0; \quad -R_{By} \cdot 3 \cdot l + P \cdot 4l = 0; \quad R_{By} = 4P/3.$$

Из (4) получим $R_{Ay} = P - R_{By}$; $R_{Ay} = -P/3$; если изменить направление этой силы на рисунке на противоположное, то будем иметь $R_{Ay} = P/3$. Из (5) получим $R_{Az} = P - R_{Bz}$; $R_{Az} = 2P/3$.

2. *Определение в.с.ф*. При решении задачи сначала представим исходную расчетную схему (на основе принципа независимости действия сил и принципа начальных размеров) как состоящую из трех более простых расчетных схем (рис. 32, *а–в*), при этом реакции в шарнире *A* поместим на самой простой из них (см. рис. 32, *б*).



а *б* *в*

Рис. 32

Расчетную схему, приведенную на рис. 32, *б*, в свою очередь представим в виде двух схем (рис. 33, *а*, *б*).

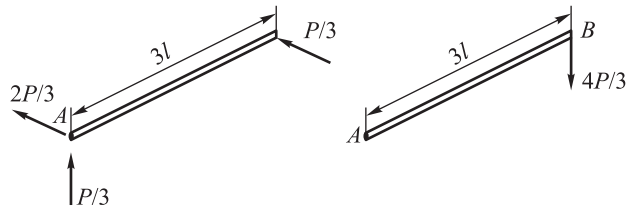


Рис. 33

Отметим, что при таком представлении исходной расчетной схемы стержень AB является связующим и на нем есть участки, общие как для двух, так и для всех трех полученных простых расчетных схем. Далее, анализируя расположение внешних нагрузок, а также расположение и связь стержней в системе, нужно принять решение, в каком направлении будем двигаться, мысленно отсекая части от них при использовании метода сечений. Решим, что этим направлением будет направление справа налево к шарнирной опоре в точке A.

Построим эпюры для простой расчетной схемы (см. рис. 32, *а*), которая имеет два участка. Мысленно отсечем часть стержня на участке GC, эта часть представлена на рис. 34.

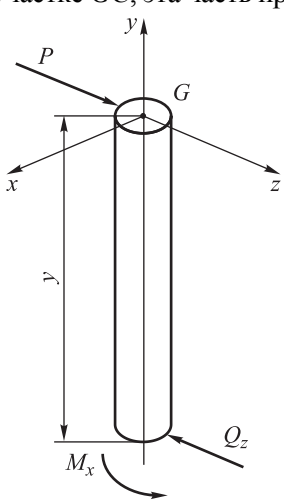


Рис. 34

В сечении, из условия равновесия отсеченной части, действуют поперечная сила Q_z и изгибающий момент M_x. Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{zi} = 0;\ -Q_z + P = 0;\ \ Q_z = P;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_i = 0;\ \ M_x - P \cdot y = 0;\ \ M_x = P \cdot y;$$

при $y = 0$, $M_x = 0$, при $y = l$ (для конца участка) $M_x = Pl$.

Далее, прежде чем перейти к рассмотрению состояния равновесия на участке AC, установим, какие поперечная сила и момент действуют на нем в точке C

(рис. 35). Эта точка общая у двух участков *GC* и *AC*, и в сечении в этом месте будут присутствовать соответственно направленные поперечная сила *P* и момент *Pl*, который теперь, для участка *AC*, станет скручивающим.

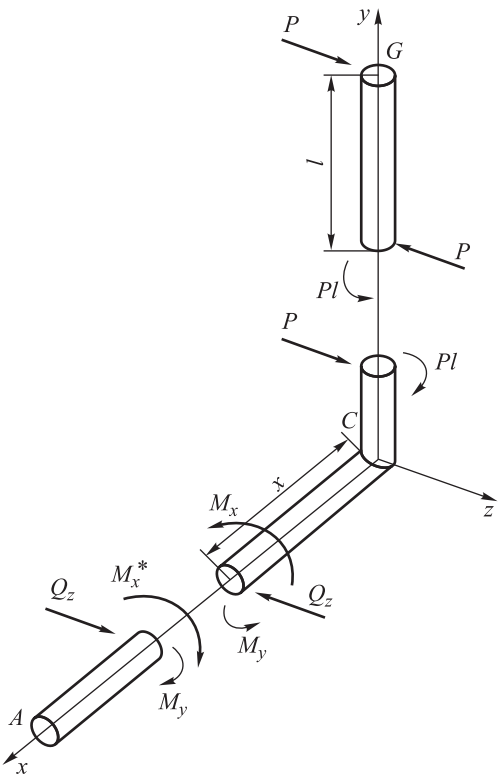


Рис. 35

Затем, мысленно отсекая часть стержня на участке *AC* (она представлена на рис. 36), установим, что в сечении, обеспечивая статическое равновесие отсеченной части по силам, действует сила Q_z, для компенсации скручивающего момента *Pl* в сечении возникает крутящий момент M_x также вокруг оси *x*.

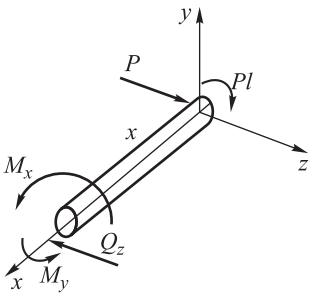


Рис. 36

Сила P относительно сечения имеет плечо x, поэтому в сечении создается также изгибающий момент M_y. Уравнения равновесия отсеченной части имеют вид

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{zi} = 0;\ -Q_z + P = 0;\ Q_z = P;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{xi} = 0;\ -M_x + P \cdot l = 0;\ M_x = P \cdot l;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{yi} = 0;\ M_y - P \cdot x = 0;\ M_y = P \cdot x.$$

Значения M_y находим из граничных условий: при $x = 0$ $M_y = 0$; при $x = l$ $M_y = Pl$. Эпюры для этой расчетной схемы представлены на рис. 37.

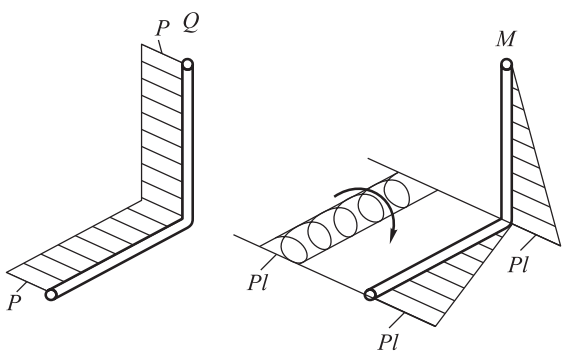


Рис. 37

Отметим, что направление крутящего момента указывают на эпюре по его направлению не на отсеченной от участка части, а на оставшейся части, т. е. по направлению $M_x^* = M_x$.

Далее рассмотрим однотипные, состоящие из одного участка расчетные схемы (см. рис. 33, *а*, *б*). Для схемы на рис. 33, *а* в.с.ф.

находим при отсечении некоторой части (рис. 38) из уравнений равновесия:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{zi} = 0; \;\; +Q_z - P/3 = 0; \;\; Q_z = P/3;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{yi} = 0; \;\; -M_y + (P/3) \cdot x = 0;$$

$$M_y = Px/3,$$

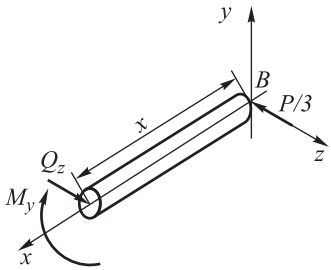


Рис. 38

т. е. закон изменения момента линейный; при $x = 0$ (в точке B) $M_y = 0$; при $x = 3l$ (в точке A) $M_y = Pl$. Эпюры показаны на рис. 39.

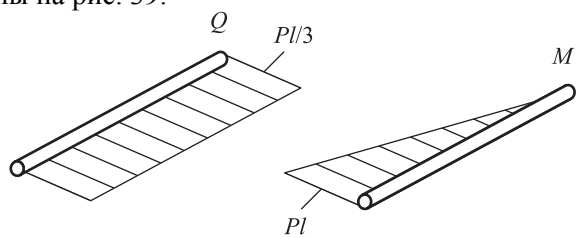


Рис. 39

Для схемы, приведенной на рис. 33, *б*, при рассмотрении статического равновесия отсеченной части (рис. 40) уравнения равновесия будут иметь вид:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{yi} = 0; \;\; Q_y - (4/3) \cdot P = 0;$$

$$Q_y = 4P/3; \;\; \sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{zi} = 0;$$

$$M_z - (4P/3) \cdot x = 0; \;\; M_z = 4Px/3,$$

т. е. закон изменения момента линейный; при $x = 0$ (в точке B) $M_z = 0$; при $x = 3l$ (в точке A) $M_z = 4Pl$. Эпюры

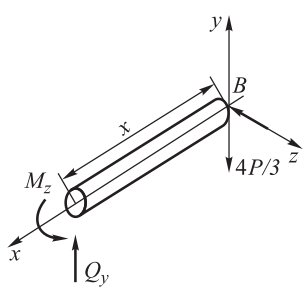


Рис. 40

для этой расчетной схемы (см. рис. 33, *б*) показаны на рис. 41.

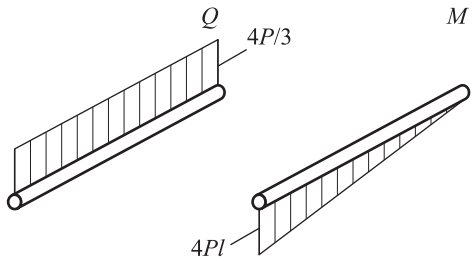


Рис. 41

Рассмотрим определение в.с.ф. в расчетной схеме, приведенной на рис. 32, *в*. Ее стержневая система состоит из трех участков. Определим в.с.ф. на участке *HE*. Отсечем от него часть, предварительно совместив с его началом (точка *H*) начало системы координат *xyz*. В состоянии статического равновесия отсеченной части в сечении должны действовать поперечная сила, имеющая направление вдоль оси *y*, и изгибающий момент M_z (рис. 42). Уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{yi} = 0; \quad P - Q_y = 0; \quad Q_y = P;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{zi} = 0; \quad Px - M_z = 0; \quad M_z = Px,$$

т. е. закон изменения момента линейный; при $x = 0$ (в точке *H*) $M_z = 0$; при $x = 2l$ (в точке *E*) $M_z = 2Pl$.

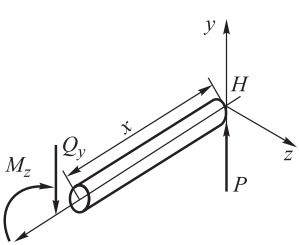


Рис. 42

Чтобы определить в.с.ф., имеющиеся на участке *DE* (см. рис. 32, *в*), следует установить, какие силы и моменты присутствуют в точке *E* (это нужно также для того, чтобы избавиться от рассмотрения статического равновесия сравнительно сложной по конфигурации отсекаемой в дальнейшем в неко-

тором месте на участке *DE* части, состоящей из стержней, расположенных по осям *x* и *z*). В этом случае можно рассматривать состояние статического равновесия только для отсекаемой на участке *DE* части, начинающейся в точке *E*. Точка *E* принадлежит участкам *HE* и *DE*. В ней на участке *HE* (рис. 43) имеются поперечная сила $Q_y = P$ и изгибающий момент $2Pl$, который в точке *E* для участка *DE* будет скручивающим (изгибающий момент на взаимно перпендикулярных стержневых участках, если один из них перпендикулярен плоскости, в которой действует этот изгибающий момент, на другом участке переходит в крутящий момент).

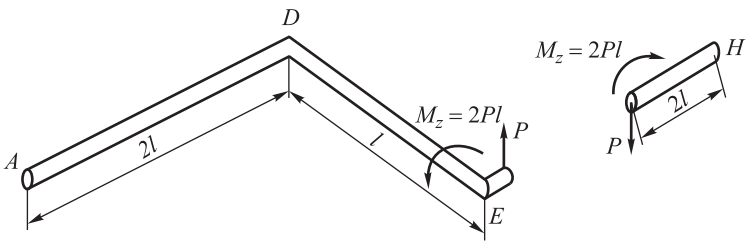


Рис. 43

Отсечем часть участка *DE* (предварительно для удобства изменив направление оси *z* на противоположное) и рассмотрим ее положение статического равновесия (рис. 44). В сечении будут присутствовать поперечная сила Q_y, крутящий момент M_z и изгибающий момент M_x (так как сила *P* относительно сечения имеет плечо *z*). Соответствующие этому состоянию уравнения имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{yi} = 0; \quad P - Q_y = 0; \quad Q_y = P;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{xi} = 0; \quad -M_{xi} + Pz = 0; \quad M_{xi} = Pz,$$

т. е. закон изменения момента линейный; при $z = 0$ (в точке *E*), $M_x = 0$; при $z = l$ (в точке *D*) $M_x = Pl$; $\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{zi} = 0; \quad 2Pl - M_z = 0;$

$M_z = 2Pl.$

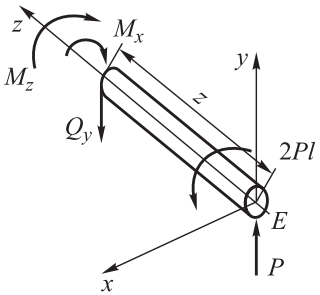


Рис. 44

В точке D (принадлежащей участкам AD и DE) на участке DE будем иметь (см. рис. 43) изгибающий момент Pl, который в этой же точке, но на участке AD переходит в крутящий момент; также на участке DE в точке D будет присутствовать крутящий момент $2Pl$, который в этой же точке D, но на участке AD переходит в изгибающий момент; там же есть еще и поперечная сила P (рис. 45).

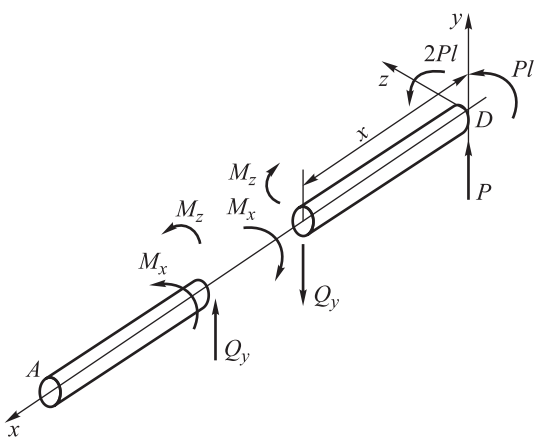


Рис. 45

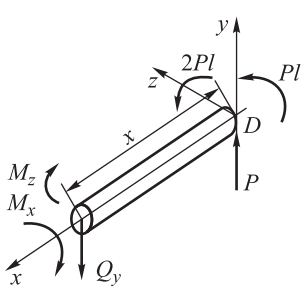


Рис. 46

Отсекая от участка DA часть (рис. 46), рассмотрим ее состояние статического равновесия, при котором в сечении должны действовать поперечная сила Q_y, изгибающий момент M_z и крутящий вокруг оси x момент M_x.

Описывающие это состояние уравнения имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{yi} = 0; \quad -Q_y + P = 0; \quad Q_y = P;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_x = 0; ; \quad -M_x + Pl = 0; \quad M_x = Pl;$$

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{M}_{zi} = 0; \quad -M_z + 2Pl + Px = 0; \quad M_z = P(2l + x),$$

т. е. закон изменения момента линейный; при $x = 0$ (в точке D) $M_z = 2Pl$; при $x = 2l$ $M_z = 4Pl$. Эпюры для этой расчетной схемы приведены на рис. 47.

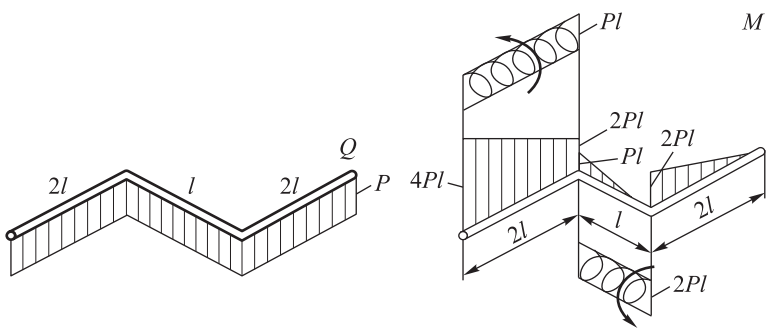


Рис. 47

Результирующие эпюры, полученные на основе принципа суперпозиции сложением соответствующих эпюр сил и моментов для простых расчетных схем (см. рис. 32, *а*, *в*; 33, *а*, *б*), приведены на рис. 48. Отметим, что на отдельных участках расчетной схемы имеем сложное напряженное состояние, при котором одновременно присутствуют изгиб и кручение.

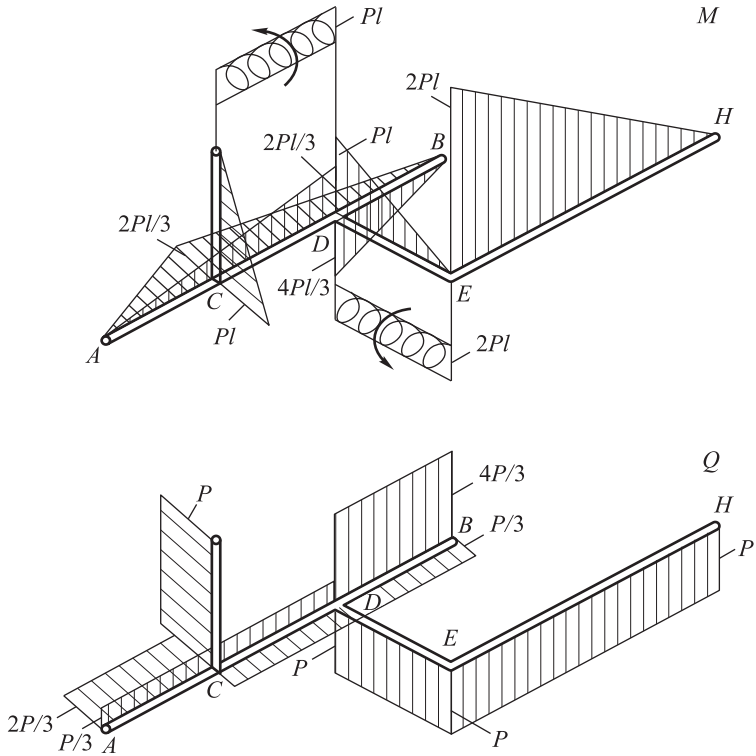


Рис. 48

Пример 6. Одним из основных элементов преобладающего большинства механизмов приборов и машин является вал. Обычно он имеет форму прямолинейного цилиндрического стрежня и служит для размещения различных деталей, выполняющих передачу вращательного движения (зубчатые колеса, шкивы, кулачки и т. д.). Валы устанавливают в корпус механизма на шарикоподшипниках или в опорах скольжения, обеспечивающих их вращение и воспринимающих в виде реакций силы и моменты, возникающие в местах контакта элементов, передающих движение.

Требуется определить в.с.ф. для концевого (последнего) вала *1* (рис. 49) механизма, на котором размещена полумуфта *2* муфты,

соединяющей этот вал с некоторым внешним валом, служащая для передачи на него вращательного движения. Кроме того, на валу *1* установлено косозубое зубчатое колесо *3*, посредством которого

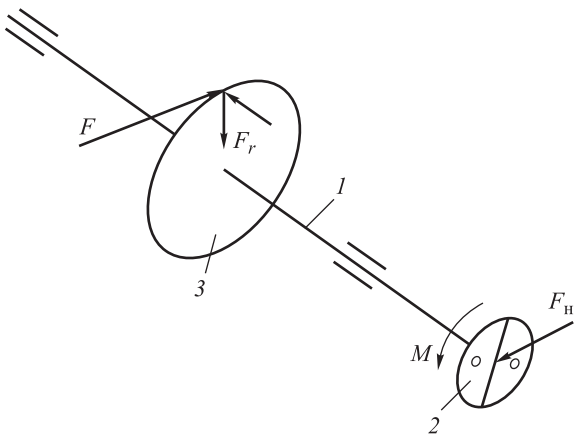


Рис. 49

движение передается в механизме на вал *1*. Передача крутящего момента при этом на вал *1* с предыдущего вала механизма осуществляется в результате силового воздействия на колесо *3* со стороны входящего с ним в зацепление зубчатого колеса, установленного на предыдущем валу. В месте контакта зубьев колес на колесе *3* возникают окружная сила F, радиальная сила F_r и осевая сила F_a. Внешний вал (на рисунке не показан) и концевой вал *1* имеют некоторую несоосность, вследствие чего в месте установки полумуфты *2* возникает радиальная сила $F_н$, действующая, например, в горизонтальной плоскости.

1. *Составление расчетной схемы*. Вал представляют как стержень, располагающийся в шарнирных опорах и подверженный одновременно изгибу и кручению под действием имеющихся нагрузок. Опору, воспринимающую радиальные и осевые нагрузки, считают шарнирно неподвижной, а воспринимающую только радиальные нагрузки — шарнирно подвижной. Опорные реакции представляют

в виде сосредоточенных сил, приложенных в середине по ширине подшипника. Внешние нагрузки в виде сил и моментов, возникающих в месте контакта передающих движение установленных на валу деталей, приводят к оси вала. Если нагрузки, действующие на вал, не располагаются в одной плоскости, то их раскладывают по двум взаимно перпендикулярным плоскостям, чтобы найти составляющие реакций и в.с.ф, лежащие в этих плоскостях. Геометрически складывая, находим результирующие опорные реакции — силы и изгибающие моменты.

Расчетная схема для рассматриваемого вала представлена на рис. 50, *а*. Получение расчетной схемы при приведении сил к оси вала поясняет рис. 50, *б*.

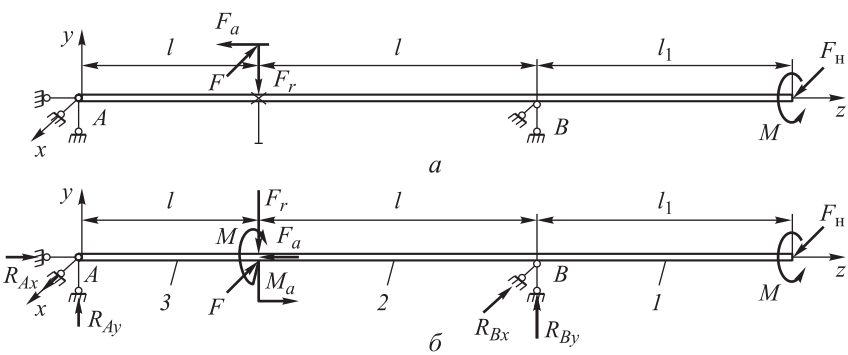


Рис. 50

2. *Определение реакций опор*. Свяжем с расчетной схемой систему координат, поместив ее начало в левый шарнир — точку *A*. Поскольку внешние нагрузки действуют в расчетной схеме по трем осям системы координат, запишем уравнения статического равновесия для нее в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{4} \vec{F}_{xi} = 0; \;\; R_{Ax} - F - R_{Bx} + F_н = 0,$$

откуда

$$R_{Ax} = F + R_{Bx} - F_н; \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{F}_{yi} = 0; \quad R_{Ay} + R_{By} - F_r = 0,$$

откуда

$$R_{Ay} = F_r - R_{By}; \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{zi} = 0; \;\; R_{Az} - F_a = 0; \;\; R_{Az} = F_a;$$

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{M}_{Axi} = 0; \quad M_a - F_r l + R_{By} 2l = 0,$$

откуда

$$R_{By} = \frac{F_r l - M_a}{2l};$$

подставляя в (7), получаем

$$R_{Ay} = \frac{F_r}{2} + \frac{M_a}{2l};$$

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{M}_{Ayi} = 0; \qquad Fl + R_{Bx} 2l - F_{\text{н}}(2l + l_1) = 0,$$

откуда

$$R_{Bx} = \frac{F_{\text{н}}(2l + l_1) - Fl}{2l};$$

подставляя в (6), получаем

$$R_{Ax} = \frac{F}{2} + \frac{F_{\text{н}} l_1}{2l}.$$

Также для моментов, действующих вокруг оси z, будем иметь:

$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{Azi} = 0$; обозначим M_{Az} как $M_{\text{кр}}$, тогда $-M_{\text{кр}} + M - M = 0$;

$M_{\text{кр}} = 0.$

Расчетная схема для рассматриваемой задачи может быть представлена на основе принципа сложения действия сил в виде суммы семи простых расчетных схем, в каждой из которых рассматривается действие лишь одного в.с.ф. — силы или момента.

В плоскости *xAz* на стержень действуют силы $F_н$, R_{Bx}, R_{Ax} и F. Для определения в.с.ф. от них будем соответственно использовать расчетные схемы, приведенные на рис. 51, *а–в*. В плоскости *yAz* действуют силы R_{Ay}, R_{By} и F_r, а также изгибающий момент M_a

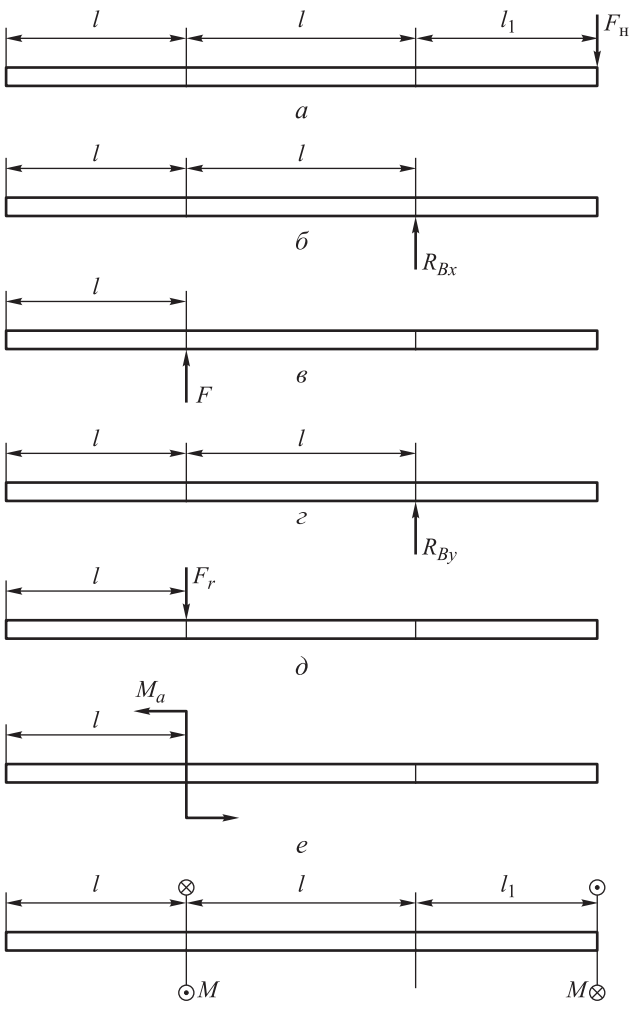


Рис. 51

от силы F_a. Для определения в.с.ф. от них рассмотрим расчетные схемы, приведенные на рис. 51, *г–е*. Также на участке длиной $l_1 + 2l$ действует крутящий момент M, а на участке l, прилегающем к точке A, — такой же момент, но противоположного направления. Эпюру в.с.ф. — крутящего момента будем строить для расчетной схемы, представленной на рис. 51, *ж*.

Рассмотрим определение в.с.ф. для перечисленных простых расчетных схем.

Для схемы, приведенной на рис. 51, *а*, состоящей из одного участка, перенесем систему координат в начало участка и изменим для удобства направление оси z на противоположное. Мысленно проводя некоторое сечение и рассматривая статическое равновесие отсеченной части (рис. 52), запишем для нее уравнения

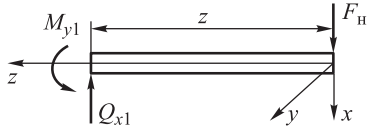


Рис. 52

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{xi} = 0; \quad Q_{x1} = F_н;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{yi} = 0; \;\; M_{y1} - F_н z = 0; \;\; M_{y1} = F_н z,$$

т. е. закон изменения момента по длине участка линейный; при $z = 0$ $M_{y1} = 0$; при $z = 2l + l_1$ $M_{y1} = F_н(2l + l_1)$.

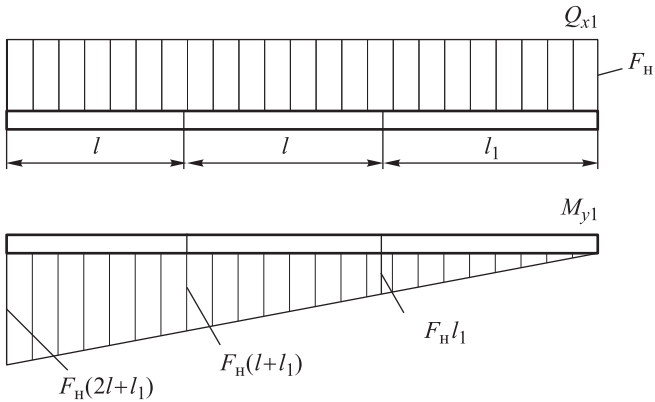


Рис. 53

Эпюры поперечной силы Q_{x1} и изгибающего момента M_{y1} приведены на рис. 53.

Аналогично получим эпюры Q_{x2} и M_{y2}, представленные на рис. 54, для расчетной схемы, приведенной на рис. 51, *б*.

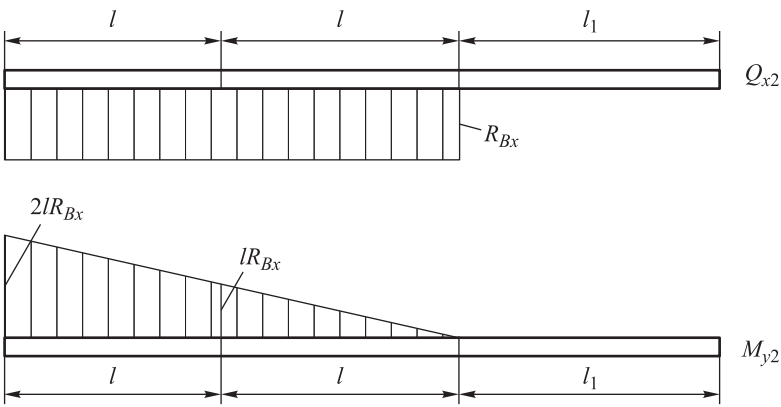


Рис. 54

Эпюры Q_{x3} и M_{y3} на рис. 55 получены для расчетной схемы на рис. 51, *в*.

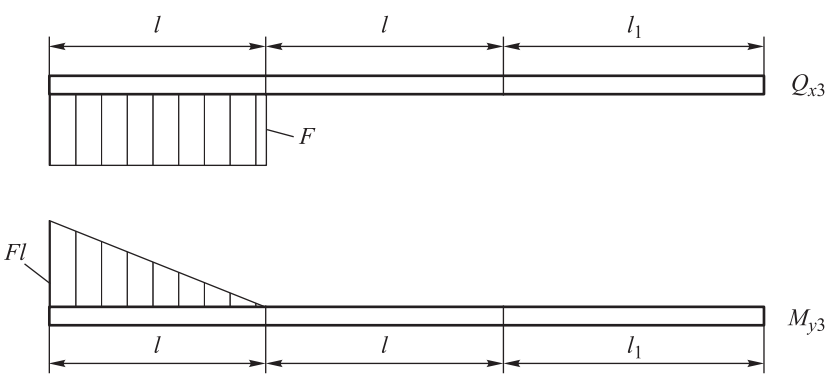


Рис. 55

Суммарные эпюры в.с.ф. — поперечной силы $Q_{x\Sigma}$ и изгибающего момента $M_{y\Sigma}$, полученные на основе принципа суперпозиции сложением соответствующих эпюр Q_{x1}, Q_{x2}, Q_{x3} и M_{y1} M_{y2} и M_{y3} приведены на рис. 56.

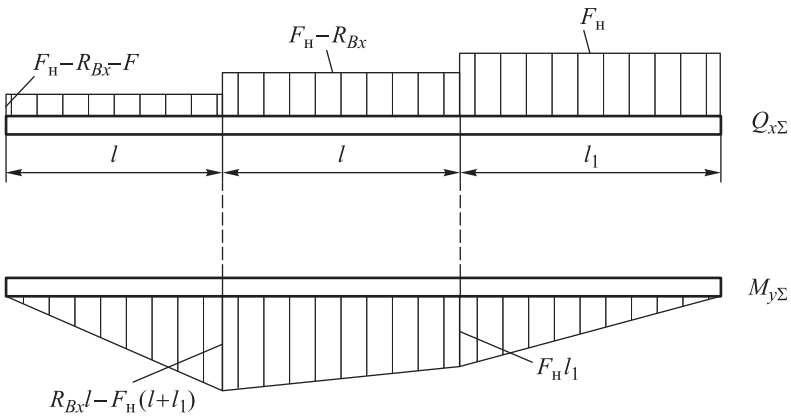


Рис. 56

Для сил R_{By}, F_r и изгибающего момента M_a, действующих в плоскости *yAz* (расчетные схемы для них приведены на рис. 51, *г – е* соответственно), получим эпюры Q_{y1} и M_{x1} (рис. 57) для расчетной схемы с силой R_{By} (см. рис. 51, *г*).

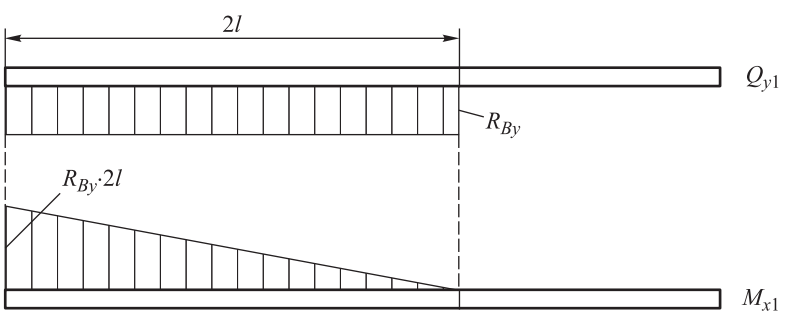


Рис. 57

На рис. 58 показаны эпюры Q_{y2} и M_{x2} для расчетной схемы с силой F_r (см. рис. 51, *д*).

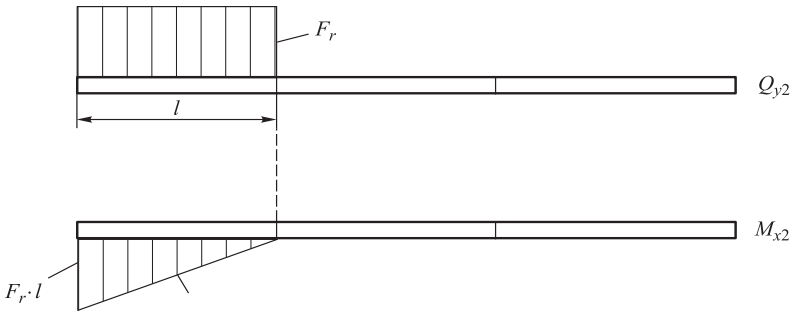


Рис. 58

На рис. 59 приведена эпюра M_{x3} для расчетной схемы с изгибающим моментом M_a (см. рис. 51, *е*).

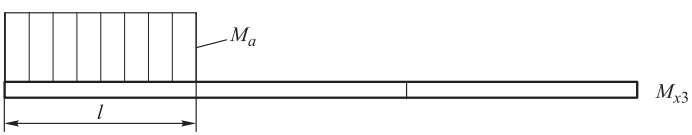


Рис. 59

Основываясь на принципе суперпозиции, получим суммарные эпюры для поперечной силы $Q_{y\Sigma}$ (рис. 60, *а*) и изгибающего момента $M_{x\Sigma}$ (рис. 60, *б*), имеющихся в плоскости *yAz*.

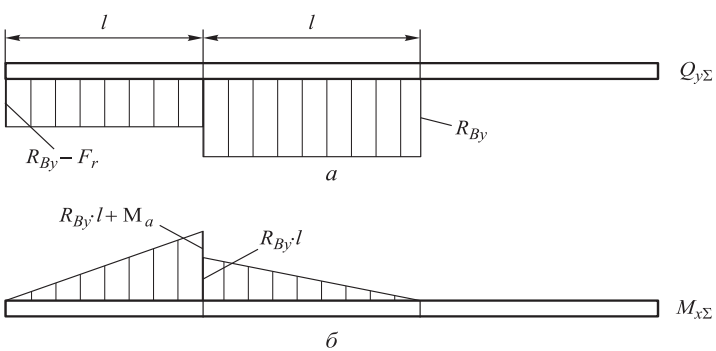


Рис. 60

Эпюра в.с.ф. — крутящего момента $M_{кр}$ для расчетной схемы на рис. 51, *ж* приведена на рис. 61.

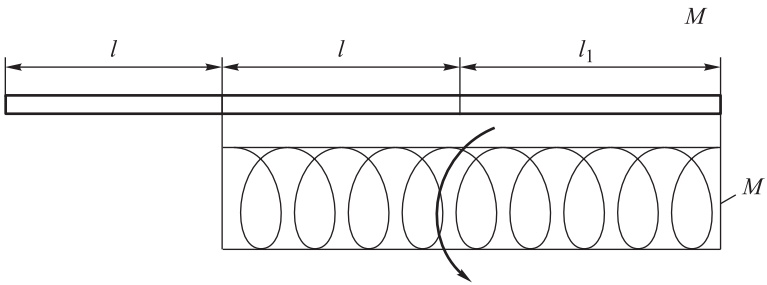


Рис. 61

Далее в результате совмещения по участкам суммарных эпюр, построенных в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, получим эпюры Q и M (рис. 62) и эпюру крутящего момента (см. рис. 61) для сложного напряженного состояния рассматриваемого вала (см. рис. 49).

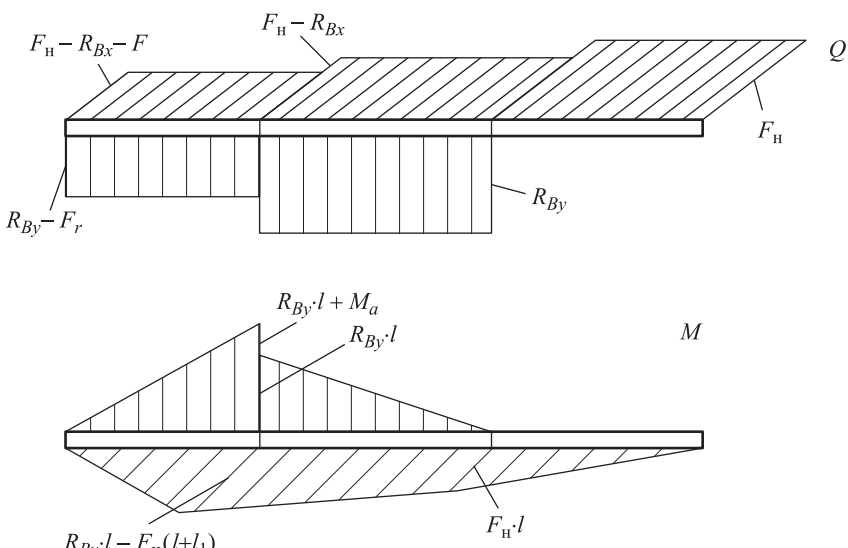


Рис. 62

Пример 7. Если требуется передать вращательное движение с одного вала на другой и при этом в силу тех или иных причин имеется угловое смещение φ их осей, то для соединения валов часто применяют карданный шарнир (рис. 63), крестовина которого соединяется опорами скольжения с вилками, установленными на валах. Расчетная схема для одной вилки карданного шарнира, передающего момент M, приведена на рис. 64.

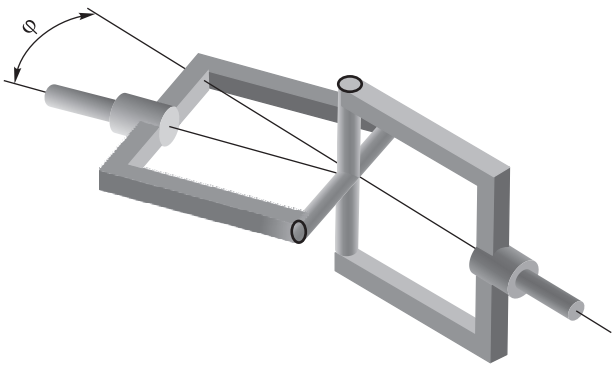


Рис. 63

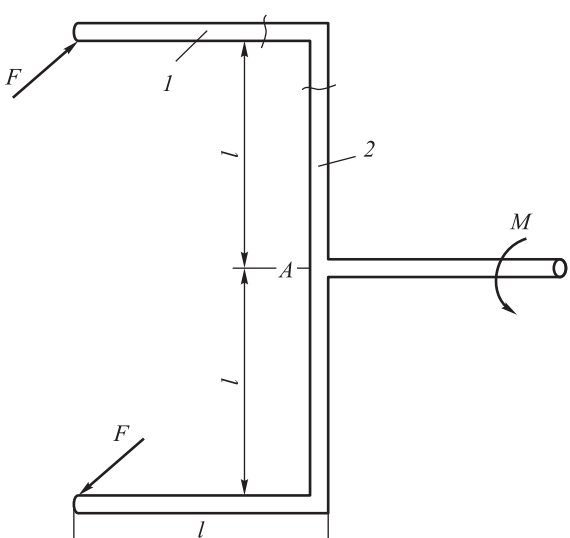


Рис. 64

Силу, посредством которой крутящий момент M передается через карданный шарнир, определяют как $F = M/2l$. Требуется найти в.с.ф., возникающие в плечах вилки шарнира, и построить для них эпюры.

В силу симметрии вилки можно рассмотреть статическое равновесие только ее участков *1* и *2*. Поместим начало системы координат *xyz* в начало участка *1* (точка приложения силы F). Мысленно проведем сечение на участке *1* (см. рис. 64) и рассмотрим состояние статического равновесия отсеченной части (рис. 65). Для него требуется наличие в сечении в.с.ф. — поперечной силы Q_x и изгибающего момента M_y.

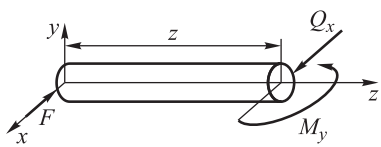


Рис. 65

Уравнения статического равновесия имеют вид:
по силам

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{xi} = 0; \quad -F + Q_x = 0; \quad Q_x = F;$$

по моментам относительно сечения

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{yi} = 0; \quad -M_y + Fz = 0; \quad M_y = Fz,$$

т. е. закон изменения момента по длине участка линейный. Для граничных точек на участке будем иметь: при $z = 0$ $M_y = 0$; при $z = l$ $M_y = Fl$.

Если провести сечение в самом конце участка *1* точка перехода на участок *2* вилки (см. рис. 64), то получим, что там присутствуют поперечная сила $Q_x = F$ и изгибающий момент $M_y = Fl$ (рис. 66).

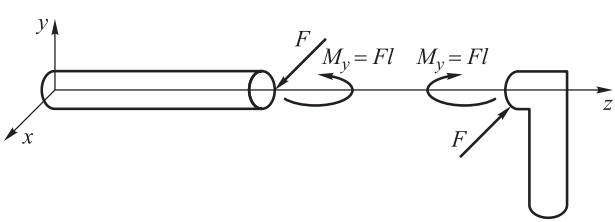


Рис. 66

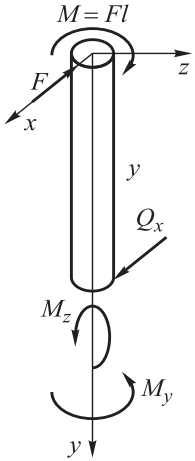


Рис. 67

Таким образом, поскольку точка перехода принадлежит обоим участкам *1* и *2* вилки (см. рис. 64) и является, кроме того, началом участка *2*, в ней будут действовать сила F и момент Fl (рис. 67), который для участка *2* (см. рис. 64) является крутящим.

Поместим начало системы координат в начало участка *2* и для удобства изменим направление оси y на противоположное. Отсекая на этом участке часть длиной y, рассмотрим статическое равновесие отсеченной части. Для его обеспечения в сечении должны присутствовать поперечная сила Q_x, изгибающий момент M_z и крутящий момент M_y.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{xi} = 0; \;\; Q_x - F = 0; \;\; Q_x = F;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{yi} = 0; \quad M_y - Fl = 0; \quad M_y = Fl;$$

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{zi} = 0; \quad -Fy + M_z = 0; \quad M_z = Fy,$$

т. е. закон изменения момента по длине участка линейный. Для концов участка будем иметь: при $y = 0$; $M_z = 0$; при $y = l$ $M_z = Fl$. Эпюры изгибающего и крутящего моментов представлены на рис. 68.

Отметим, что на участке *2* вилки (см. рис. 64) имеется сложное напряженное состояние: одновременные изгиб и кручение. Анализ вида полученных эпюр позволяет утверждать, что наиболее опасной точкой вилки является точка *A*.

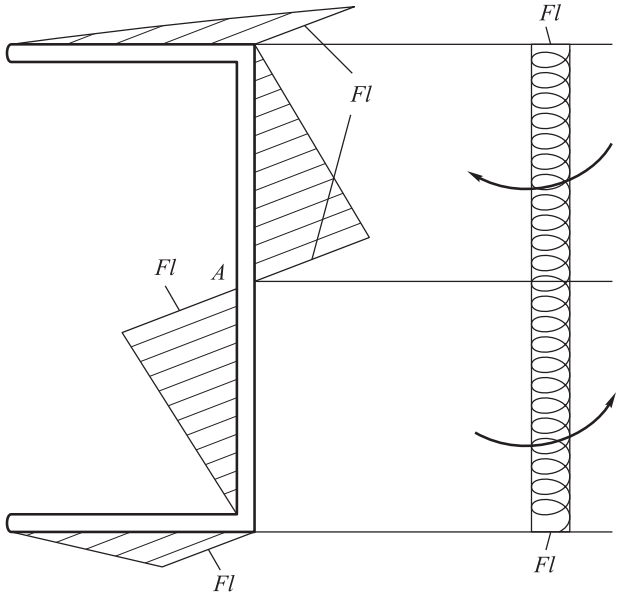


Рис. 68

В конструкциях карданных шарниров в точках, подобных точке *A* на рис. 64, вилки выполняют утолщенными (см. рис. 63).

Растяжение — сжатие

Пример 8. В помещении в потолок вертикально заделан направляющий стержень-подвес, на котором прикреплены на разной высоте три блока проекционного и электронного оборудования (рис. 69, *а*), имеющие массы $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 20$ кг и $m_3 = 5$ кг. Требуется построить эпюры растягивающей силы для стержня-подвеса, если известно, что блок массой m_1 размещен на стержне на расстоянии $l_1 = 3$ м от потолка, а блоки массами m_2 и m_3 — на расстояниях $l_2 = 2$ м и $l_3 = 1{,}5$ м соответственно. Если принять g = 10 м/с^2, то вес третьего блока будет равен $P_3 = m_3 g = 50\ \text{Н} = P$, а для второго и первого блоков будем соответственно иметь $P_2 = 200\ \text{Н} = 4P$ и $P_1 = 100\ \text{Н} = 2P$. Расчетная схема представлена на рис. 69, *б*.

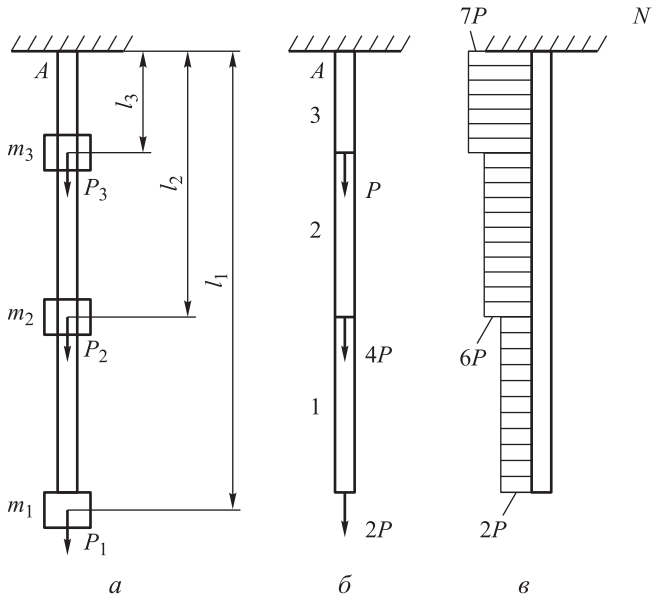


Рис. 69

1. *Определение реакции опоры*. Из условия нагружения направляющего стержня-подвеса в заделке (точка A) будет присутствовать одна реакция — нормальная сила N_A. Из уравнения статического равновесия получим

$$\sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i = 0; \quad P_1 + P_2 + P_3 - N_A = 0; \;\; N_A = 7P.$$

2. *Определение в.с.ф*. Расчетная схема содержит три участка. Рассмотрим состояние статического равновесия первого из них. Мысленно отсечем на нем некоторую часть (рис. 70, *а*). Уравнение статического равновесия для этой отсеченной части имеет вид $N_1 = 2P$.

Рассмотрим статическое равновесия второго участка, для чего также отсечем на нем часть (рис. 70, *б*). Уравнение равновесия для этой части будет иметь вид $N_2 = 6P$.

Рассмотрим определение в.с.ф. на третьем участке, для чего мысленно проведем сечение на нем в некотором месте (рис. 70, *в*). Уравнение статического равновесия для отсеченной части: $N_3 = 7P$.

Эпюра в.с.ф. — растягивающей силы для этого примера приведена на рис. 69, *в*.

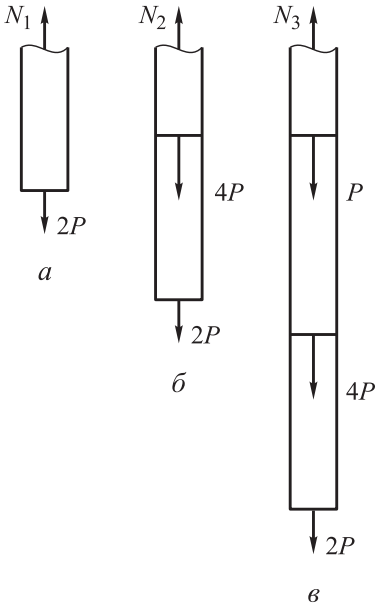


Рис. 70

Кручение

Пример 9. На вал круглого поперечного сечения со шкива *1* (рис. 71, *а*) передается мощность $P_1 = 4$ Вт, при этом со шкива *2* снимается мощность $P_2 = 1{,}2$ Вт, а со шкива *3* — мощность $P_3 = 2{,}8$ Вт. Вал вращается со скоростью n = 500 об/мин. Расчетная схема вала представлена на рис. 71, *б*.

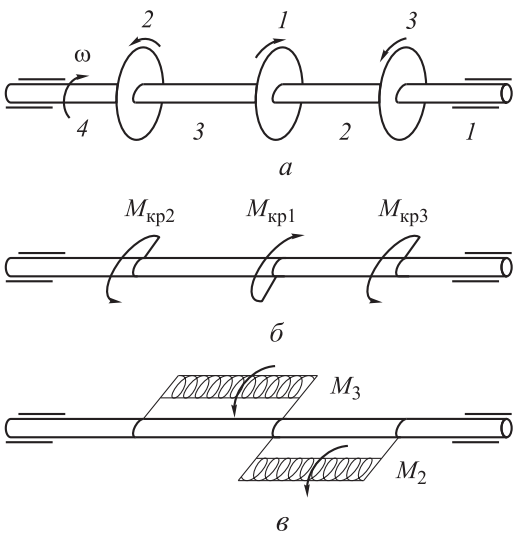


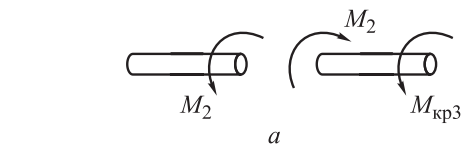
Рис. 71

Сначала нужно определить моменты на шкивах. Для этого найдем угловую скорость ω, с которой вращается вал:

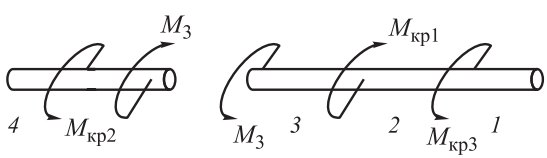
$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 500}{30} = 52{,}3 \text{ с}^{-1}.$$

Затем по формуле $M_{кр} = P/\omega$ определяем моменты на всех шкивах: $M_{кр1} = 4/52{,}3 = 76{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н·м = 76,5 Н·мм; $M_{кр2} = 1{,}2/52{,}3 = 23 \cdot 10^{-3}$ Н·м = 23 Н·мм; $M_{кр3} = 2{,}8/52{,}3 = 53{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н·м = 53,5 Н·мм.

Далее по полученным значениям моментов, используя метод сечений, строим эпюру крутящих моментов. На участке *1* (без нагружения крутящим моментом) эпюры нет, т. е. $M_1 = 0$. На участке *2* уравнение статического равновесия для отсеченной части участка (рис. 72, *а*): $\sum_{i=1}^{2} M_i = 0$ — имеет вид $-M_2 + M_{кр3} = 0$, откуда $M_2 = M_{кр3}$; $M_2 = 53{,}5$ Н·мм.



а



б

Рис. 72

На участке *3* (рис. 72, *б*) в сечении, отсекающем часть вала, будет существовать в.с.ф. — крутящий момент M_3. Уравнение статического равновесия имеет вид: $M_3 - M_{кр1} + M_{кр3} = 0$, откуда $M_3 = M_{кр1} - M_{кр3}$; $M_3 = 23$ Н·мм. На участке *4* (см. рис. 71, *а*) $M_4 = 0$.

Эпюра крутящих моментов по участкам приведена на рис. 71, *в*. Из полученных результатов ясно, что наиболее опасным участком (где значение $M_{кр}$ максимально) является участок *2* между шкивами *1* и *3* (см. рис. 71, *а*).

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

Выход из строя элементов приборных устройств (э.п.у.) может быть обусловлен не только их разрушением под нагрузкой, но и утратой требуемых целевых конструкционных характеристик. Это связано со спецификой использования различных э.п.у. Так, от чувствительных упругих элементов помимо прочих важных приборных характеристик (масса, габариты и др.) требуется строгая пропорциональность между их деформациями и возникающими напряжениями (строгое соблюдение закона Гука); от элементов конструкций — высокие упругие свойства, недопущение превышения напряжениями значения предела текучести и т. д. Необходимо, чтобы максимальные нормальные σ_{max} и касательные τ_{max} напряжения в материалах механических деталей, работающих под нагрузкой, не превосходили допускаемые значения, которые устанавливают исходя из соответствующих предельных значений напряжений: $\sigma_{max} \le [\sigma] = \sigma_L / n_L$ и $\tau_{max} \le [\tau] = \tau_L / n_L$, где n_L — коэффициент запаса по соответствующему предельному для материала напряжению σ_L или τ_L; $[\sigma]$ и $[\tau]$ — допускаемые нормальное и касательное напряжения.

Для различных видов нагружения имеются свои зависимости, позволяющее определить σ_{max} и τ_{max} при расчетах на прочность, а при расчетах на жесткость — еще и формулы для удлинения Δl, прогиба δ и угла закручивания φ, для которых также должны выполняться условия $\Delta l_{max} \le [\Delta l]$, $\delta_{max} \le [\delta]$ и $\varphi_{max} \le [\varphi]$. Кроме того, расчеты ведут по относительным упругим деформациям ε, их значения не должны превышать допускаемых значений [ε]. На основе этих соотношений и указанных выше условий для σ_{max} и τ_{max} в конструкторских расчетах определяют основные размеры э.п.у., а при известных размерах э.п.у. ведут проверочные расчеты.

При расчете на прочность основным выражением является

$$\sigma_{\max} = (N/S)_{\max} \le [\sigma],$$

где N есть в.с.ф. — нормальная сила (растягивающая или сжимающая), возникающая при нагружении детали в поперечном сечении площадью S. Если площадь поперечного сечения S остается неизменной по длине детали, например, имеющей форму стержня, то в расчете на прочность рассматривают его поперечное сечение (с соответствующей координатой), в котором имеется (и получено на эпюре N) значение $N_{\max}$.

Для определения абсолютного удлинения Δl стержня длиной l используют формулу

$$\Delta l = \int_l [N_i/(ES)]\, dz,$$

где E — модуль упругости первого рода для материала стержня; dz — элемент длины по его оси. Для стержня, имеющего одинаковое значение силы N и жесткости ES по всей длине,

$$\Delta l = Nl/(ES).$$

Если в стержневой детали могут быть выделены несколько n участков длиной l_i, то для определения полного удлинения $l_{\text{п}}$ пользуются формулами

$$\Delta l_{\text{п}} = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \left[N_i/(ES) \right] dz; \quad \Delta l_{\text{п}} = \sum_{i=1}^{n} N_i l_i/(ES).$$

Пример 10. Из расчета на прочность определить (оценить) минимально возможные диаметр d и толщину h стержня-подвеса (см. рис. 69, *а*), выполненного в виде трубки из стали 10, для которой предел текучести $\sigma_{\text{т}} = 200$ МПа, коэффициент запаса $n_{\text{т}} = 3$.

Из эпюры, представленной на рис. 69, *в* для стержня-подвеса, следует, что $N_{\max} = 7P = 350$ Н.

Площадь сечения трубки при $h << d$ можно определить по формуле $S = 2\pi dh$. Примем $h = \kappa d$, где κ некоторый коэффициент, тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{S} = \frac{7P}{2\pi\kappa d^2} \le [\sigma] = \frac{\sigma_т}{n_т},$$

откуда

$$d \ge \sqrt{\frac{7Pn_т}{2\pi\kappa\sigma_т}},$$

даже при $\kappa = 0{,}1$

$$d \ge \sqrt{\frac{350 \cdot 3}{6{,}28 \cdot 0{,}1 \cdot 200}} = 2{,}89 \text{ мм}.$$

Расчет показывает, что диаметр трубки и ее толщина могут быть выбраны несколько бóльшими, например, из соображений размещения в ней питающих и информационных кабелей проекционного и электронного оборудования, а также для удобства монтажа и эксплуатации указанного оборудования на подвесе.

Пример 11. Четырехгалетный переключатель (рис. 73, *а*) имеет пары объединенных в блоки щеточных контактов *1*, воздействующих на контактные галеты *2* силой $F = 20$ Н. Для получения контактных сил галеты стянуты шпильками *3*, а блоки контактов фиксируются на оси *5* переключателя штифтами *4*, основание *6* с помощью втулки *7* и штифта *8* фиксируется в продольном направлении. Для оценки механической надежности переключателя требуется определить диаметр d его оси *5* из расчета на прочность, если принимать во внимание только имеющиеся силы растяжения — сжатия и пренебречь ослаблением оси *5* из-за наличия отверстий для штифтов. Материал оси — сталь 10 ($\sigma_т = 200$ МПа), коэффициент запаса $n_т = 4$.

Расчетная схема для оси переключателя представлена на рис. 73, *б*. Поместим начало координат в точку A и направим ось z по оси переключателя, а ось y вверх. Так как набор галет и оснований переключателя стянут шпильками, при построении расчетной схемы получили статически неопределимую систему с реакциями R_A и R_B, которые не могут быть найдены сразу из уравнения статического равновесия по оси переключателя

$$-R_A - R_B + 4F = 0. \qquad (8)$$

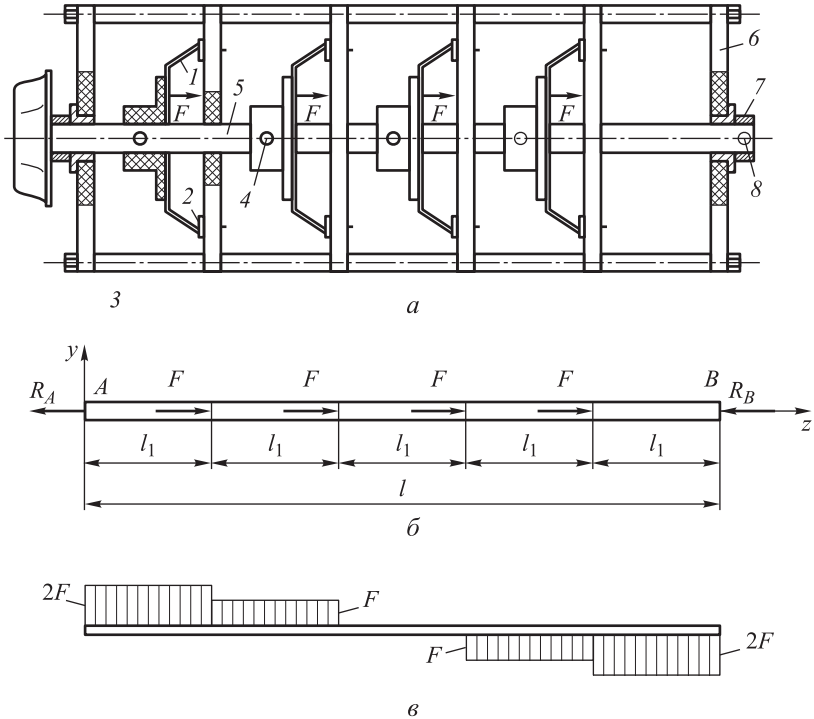


Рис. 73

Для определения одной из реакций можно воспользоваться уравнением совместности деформаций. Длина оси переключателя после его сборки для успешного функционирования должна оставаться неизменной, т. е. перемещение Δl точки приложения реакции R_B должно быть равно нулю $(\Delta l = 0)$. Это перемещение будет складываться из растяжения участков оси в результате совместного действия четырех сил (рис. 74), каждая из которых равна F, и сжатия всей оси силой R_B:

$$\Delta l = \frac{Fl_1}{ES} + \frac{F2l_1}{ES} + \frac{F3l_1}{ES} + \frac{F4l_1}{ES} - \frac{R_B l}{ES} = 0,$$

откуда, принимая во внимание, что $l = 5l_1$, получаем $R_B = 2F$. Подставляя полученное значение R_B в формулу (8), будем иметь $R_A = 2F$.

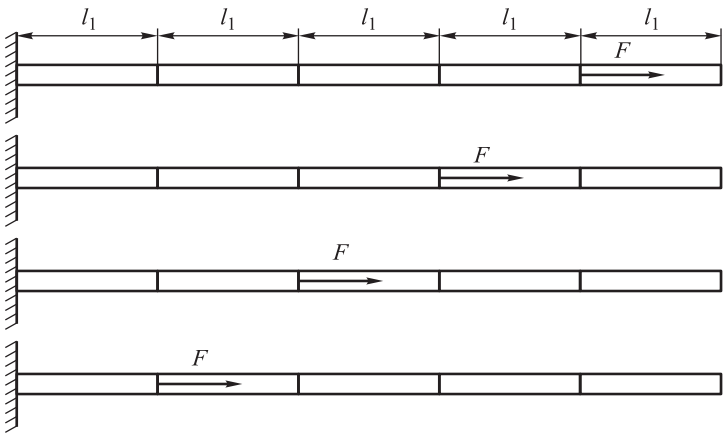


Рис. 74

Расчетная схема переключателя содержит пять участков. Мысленно проводя сечения на каждом участке, записывая и решая уравнения статического равновесия для них, получаем эпюру нормальных сил (рис. 73, *в*). Из эпюры ясно, что наибольшее значение растягивающей (что более опасно) силы $N_{\max} = 2F$ имеется на участке, прилегающем к точке A. Площадь сечения оси переключателя $S = \pi d^2/4$. При этом максимальные нормальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{S} = \frac{8F}{\pi d^2}.$$

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{8F}{\pi d^2} \le [\sigma] = \frac{\sigma_т}{n_т},$$

откуда получаем

$$d \ge \sqrt{\frac{8Fn_т}{\pi\sigma_т}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 20 \cdot 4}{3{,}14 \cdot 200}} = 1 \text{ мм}.$$

В реальном переключателе диаметр оси *5* больше, чем полученный в расчете. Это позволяет сделать вывод о том, что конструкция обладает высокой механической надежностью.

Кручение

Для расчета на прочность при кручении стержневого элемента требуется определить касательные напряжения в сечениях по всей его длине и установить максимальные значения этих напряжений

$$\tau_{\max} = (M_{\text{кр}}/W_p)_{\max},$$

где $M_{\text{кр}}$ — крутящий момент; W_p — полярный момент для поперечного сечения стержневого э.п.у. (причем, если W_p не изменяется по оси стержня, то $\tau_{\max} = M_{\text{кр}\max}/W_p$).

Далее должно выполняться условие

$$\tau_{\max} = \left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_p}\right)_{\max} \le [\tau] = \frac{\tau_L}{n_L}. \qquad (9)$$

Жесткость скручиваемого стержневого э.п.у. определяется углом закручивания нормального к его оси сечения:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{M_{\text{кр}\,i}\,dz}{GI_{pi}},$$

где n — число скручиваемых участков; $M_{\text{кр}\,i}$ — крутящий момент на некотором i-м участке; I_{pi} — полярный момент инерции поперечного сечения на i-м участке; l_i — длина i-го участка; G — модуль упругости второго рода материала э.п.у.

Для стержня, имеющего n участков длиной l_i с одинаковой крутильной жесткостью GI_p и постоянным значением $M_{\text{кр}\,i}$ на каждом участке:

$$\varphi = \frac{1}{GI_p}\sum_{i=1}^{n} M_{\text{кр}\,i} l_i .$$

Условие, ограничивающее угол закручивания некоторым допускаемым значением $[\varphi]$ (при расчете на жесткость), имеет вид

$$\varphi_{\max} \le [\varphi]. \qquad (10)$$

В формуле (10) иногда используют удельный угол закручивания $\varphi_{\text{уд}} = \varphi / l$, тогда

$$\varphi_{\text{уд}\,\max} \le [\varphi_{\text{уд}}], \qquad (11)$$

где $[\varphi_{\text{уд}}]$ — допускаемое значение удельного угла закручивания.

Пример 12. Определить диаметр вала d (см. рис. 71, *а*), приняв, что он на всех участках одинаков; материал вала — сталь 45 (предел прочности, или временное сопротивление, $\sigma_{\text{в}} = 600$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа); примем также, что $[\tau] = 0{,}1\sigma_{\text{в}}$, $[\varphi_{\text{уд}}] = 7{,}5 \cdot 10^{-6}$ мм$^{-1}$. Из расчета на прочность при кручении определяем диаметр вала, используя формулу (9). Для вала круглого сечения $W_p = \pi d^3/16 \approx \approx 0{,}2d^3$, тогда

$$\frac{M_2}{0{,}2d^3} \le [\tau]; \quad d \ge \sqrt[3]{\frac{M_2}{0{,}2[\tau]}}; \quad d \ge \sqrt[3]{\frac{53{,}5}{0{,}2 \cdot 60}} = 1{,}64 \text{ мм}.$$

Диаметр вала также может быть определен из расчета на крутильную жесткость с использованием допускаемого значения угла закручивания. Применим формулу (11) для удельного угла закручивания. Поскольку $\varphi = \dfrac{M_{\text{кр}} l}{GI_p}$, то $\varphi_{\text{уд}} = \dfrac{M_{\text{кр}}}{GI_p}$, и тогда будем иметь $\varphi_{\text{уд}\,\max} = \dfrac{M_{\text{кр}\,\max}}{GI_p} \le [\varphi_{\text{уд}}]$. Принимая во внимание, что для вала круглого сечения $I_p = \pi d^4/32 \approx 0{,}1d^4$, получаем

$$\frac{M_2}{G0{,}1d^4} \le [\varphi_{\text{уд}}],$$

откуда

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{M_2}{0{,}1G[\varphi_{уд}]}};\quad d \geq \sqrt[4]{\frac{53{,}5}{0{,}1\cdot 8\cdot 10^4\cdot 7{,}5\cdot 10^{-6}}} = 5{,}46 \text{ мм}.$$

Далее из стандартного ряда размеров остается выбрать диаметр вала, больший 5,46 мм.

Изгиб

Основным выражением прочностного расчета стержневых элементов при изгибе является

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{M_{изг}}{W_{изг}}\right)_{\max} \leq [\sigma_{изг}] = \frac{\sigma_L}{n_{Lизг}}, \qquad (12)$$

где $M_{изг}$ — изгибающий момент в рассматриваемом сечении; $W_{изг}$ — момент сопротивления рассматриваемого сечения при изгибе (для прямоугольного сечения стержня, имеющего ширину сечения b и высоту h, $W_{изг} = bh^2/6$; для круглого сечения диаметром d $W_{изг\,кр} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1d^3$); $[\sigma_{изг}]$ — допускаемое нормальное напряжение при изгибе; σ_L — предельное значение напряжений для материала изгибаемого стержневого э.п.у.; $n_{Lизг}$ — коэффициент запаса (для данной задачи) при изгибе.

Если на всех участках изгибаемого стержня момент $W_{изг}$ не изменяется (сечения одинаковые), то будем иметь

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{изг\,\max}}{W_{изг}} \leq [\sigma_{изг}].$$

Прогиб (перемещение) δ некоторого сечения при изгибе определяем, вычисляя интеграл Мора:

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{M_{изг\,i} M_{1i}\, dz}{EI_{xi}},$$

где $M_{\text{изг}\,i} = M_{\text{изг}\,i}(z)$ — функция изгибающего момента от z на некотором i-м участке стержня (берем из уравнения равновесия для рассматриваемого участка); $M_{1i} = M_{1i}(z)$ — функция изгибающего момента на некотором i-м участке стержня от единичной нагрузки, приложенной как единственной в точке определения перемещения в заданном направлении (берем из уравнения равновесия для рассматриваемого участка), при этом все другие внешние нагрузки считаем отброшенными; I_{xi} — момент инерции сечения на участке, имеющем длину l_i (для прямоугольного поперечного сечения $I_{xi} = bh^3/12$, для круглого сечения $I_{xi} = \pi d^4/64$).

Интеграл Мора для стержней с прямолинейной осью и постоянной на участках изгибной жесткостью EI_{xi} вычисляем по способу Верещагина. В этом случае

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{EI_{xi}} S_{\text{изг}\,i}\, M_{1i}\big|_{z=z_{\text{ц.т.}}},$$

где $S_{\text{изг}\,i}$ — площадь эпюры изгибающего момента на i-м участке; $M_{1i}\big|_{z=z_{\text{ц.т.}}}$ — значение момента (ординаты) на эпюре от единичной нагрузки под центром тяжести эпюры $M_{\text{изг}\,i}$ на рассматриваемом i-м участке.

Пример 13. Контакты *4* и *5* (рис. 75) установлены на одинаковых плоских контактных пружинах *2* и *7*, выполненных из бронзы БрБ2 ($E = 1{,}33 \cdot 10^5$ МПа), на расстоянии l = 50 мм от колодки *1*.

Расстояние между контактами $\delta_к$ = 2 мм, но если пренебречь размерами контактов, то можно считать, что это расстояние между контактными пружинами *2* и *7*. Контакты замыкаются под действием поступательно перемещающегося толкателя *3*, расположенного на расстоянии a = 10 мм от колодки *1*. Под пружиной *7* с зазором δ_y = 1мм на расстоянии $l/2$ от колодки установлен упор *6*. Размеры поперечного сечения плоских контактных пружин: ширина b = 5 мм, высота h = 0,25 мм (отметим, что высота пружины значительно меньше всех заданных расстояний и зазоров, поэтому там, где возможно, этой высотой сечения будем пренебрегать).

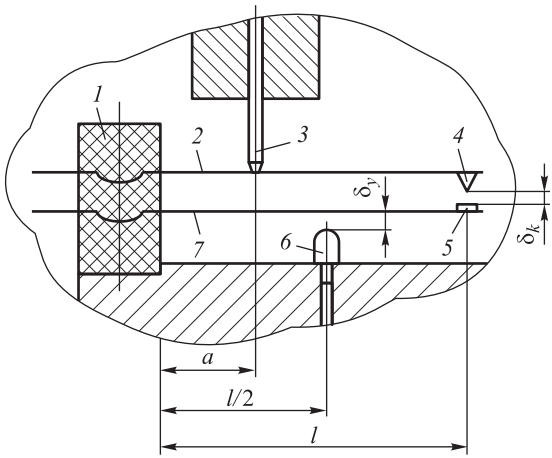


Рис. 75

Определить жесткость $k = F/\lambda$ контактной группы (F — сила, λ — перемещение толкателя *3*) до посадки пружины *7* на упор *6* и контактную силу Q в момент соприкосновения пружины *7* с упором *6*.

Расчетная схема задачи изображена на рис. 76, расчетная схема упругой системы до соприкосновения контактов — на рис. 77, *а*.

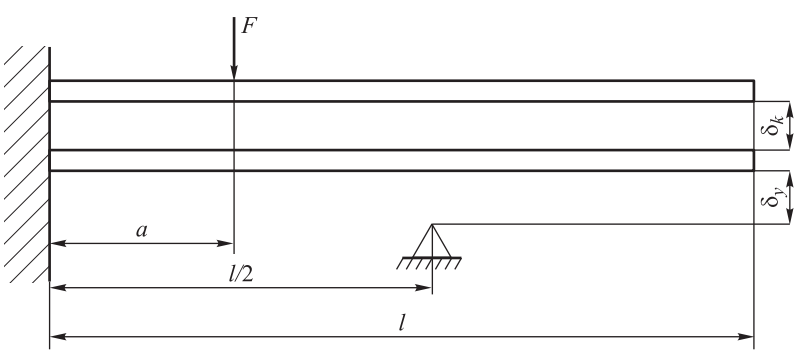


Рис. 76

Для определения перемещения λ_1 толкателя (фактически плоской пружины *2*) до соприкосновения контактов *4* и *5*, т. е. до момента, когда начинают деформироваться обе пружины *2* и *7* (см. рис. 75), необходимо воспользоваться способом Верещагина для вычисления интеграла Мора. Обозначим как F_1 силу, с которой толкатель действует только на пружину *2*.

Сначала найдем зависимость между перемещением λ_1 пружины *2* (а значит, и толкателя *3*) и силой F_1 в точке приложения этой силы (см. рис. 77, *а*). Найдем перемещение. Для этого в точке действия толкателя на пружину *2* (в точке действия силы F_1) нужно приложить единичную силовую нагрузку (так как находим линейное перемещение) в направлении предполагаемого перемещения пружины *2* (рис. 77, *б*). После этого необходимо определить на эпюре изгибающего момента от единичной нагрузки (см. рис. 77, *б*) ординату под центром тяжести ранее построенной эпюры момента от внешней нагрузки F_1 (см. рис. 77, *а*) и, умножив площадь эпюры на ординату, найти перемещение:

$$\lambda_1 = \frac{1}{EI_x}\left[\left(-\frac{1}{2}F_1 aa\right)\left(-1\cdot\frac{2}{3}a\right)\right] = \frac{F_1 a^3}{3EI_x}. \qquad (13)$$

По закону Гука $k = F_1/\lambda_1$, поэтому

$$k = \frac{3EI_x}{a^3};\ I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{5\cdot(0,25)^3}{12} = 0,0065 \text{ мм}^4;$$

$$k = \frac{3\cdot 1,33\cdot 10^5\cdot 0,0065}{10^3} = 2,6 \text{ Н}\cdot\text{мм}^{-1}.$$

Перемещение контакта *4* до замыкания с контактом *5* (фактически перемещение пружины *2*) в месте размещения контакта *4* может быть определено вычислением интеграла Мора по способу Верещагина. Для этого в точку, где ищем линейное перемещение (в место расположения контакта *4*), прикладываем единичную силовую нагрузку в направлении ожидаемого перемещения и строим эпюру изгибающего момента от этой нагрузки (рис. 77, *в*).

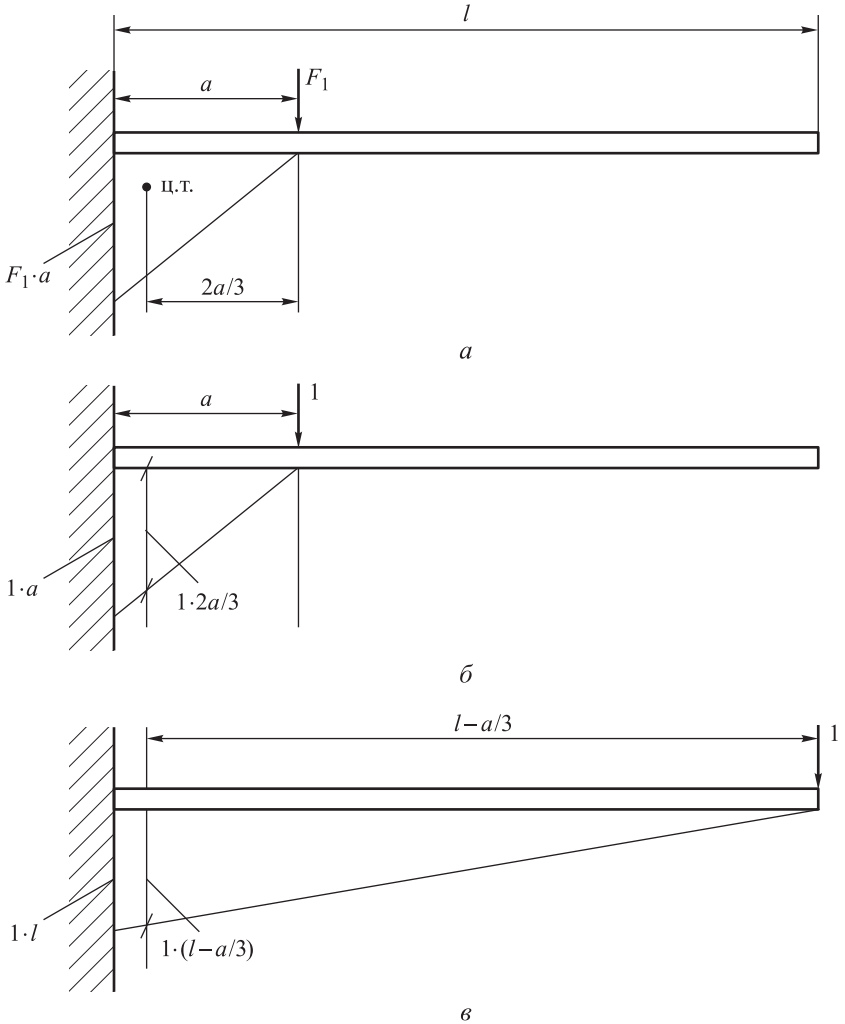


Рис. 77

Используем эпюру от внешней нагрузки — силы F_1 (см. рис. 77, *а*), на которой определено положение центра тяжести эпюры. Далее на эпюре момента от единичной нагрузки опреде-

ляем ординату f под центром тяжести эпюры от внешней нагрузки. Из подобия треугольников получаем

$$\frac{f}{1l} = \frac{(l - a/3)}{l}; \quad f = 1\frac{(3l - a)}{3}.$$

Далее находим перемещение δ пружины *2* в месте расположения контакта *4* до его замыкания с контактом *5* (см. рис. 75):

$$\delta = \delta_к = \frac{1}{EI_x}\left[\left(-\frac{1}{2}F_1 aa\right)(-f)\right] = \frac{F_1 a^2(3l - a)}{6EI_x}.$$

Для известного значения $\delta = \delta_к = 2$ мм можно найти

$$F_1 = \frac{6EI_x\delta_к}{a^2(3l - a)} = \frac{6 \cdot 1{,}33 \cdot 10^5 \cdot 0{,}0065 \cdot 2}{10^2(3 \cdot 50 - 10)} = 0{,}741 \text{ Н}.$$

Теперь находим перемещение толкателя *3*:

$$\lambda_1 = \frac{F_1}{k} = \frac{0{,}741}{2{,}6} = 0{,}29 \text{ мм}.$$

После соприкосновения контактов пружины *2* и *7* (см. рис. 75) под действием толкателя будут изгибаться вместе и на пружину *2* помимо силы F со стороны толкателя также действует сила Q со стороны контакта *5* (фактически пружины *7*). Перемещение пружины *2* теперь необходимо рассматривать как разность перемещений под действием сил F и Q (рис. 78). В месте действия толкателя перемещение пружины (и фактически толкателя) $\lambda_т = \lambda_{тF} - \lambda_{тQ}$, где $\lambda_{тF}$ — перемещение пружины *2* (см. рис. 75) в месте действия толкателя *3* от силы F, выражаемое формулой (12); $\lambda_{тF} = \lambda_1$; $\lambda_{тQ}$ — перемещение пружины *2* в месте действия толкателя *3* от силы Q.

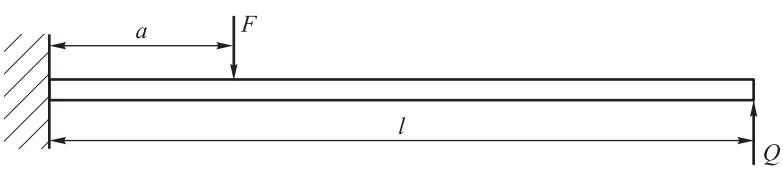


Рис. 78

Для определения перемещения $\lambda_{тQ}$ способом Верещагина построим эпюру от внешней силы Q (рис. 79, *а*), а также, приложив силу, равную единице, в месте действия толкателя *3* на пружину *2* (см. рис. 75), построим эпюру от этой единичной силы (рис. 79, *б*).

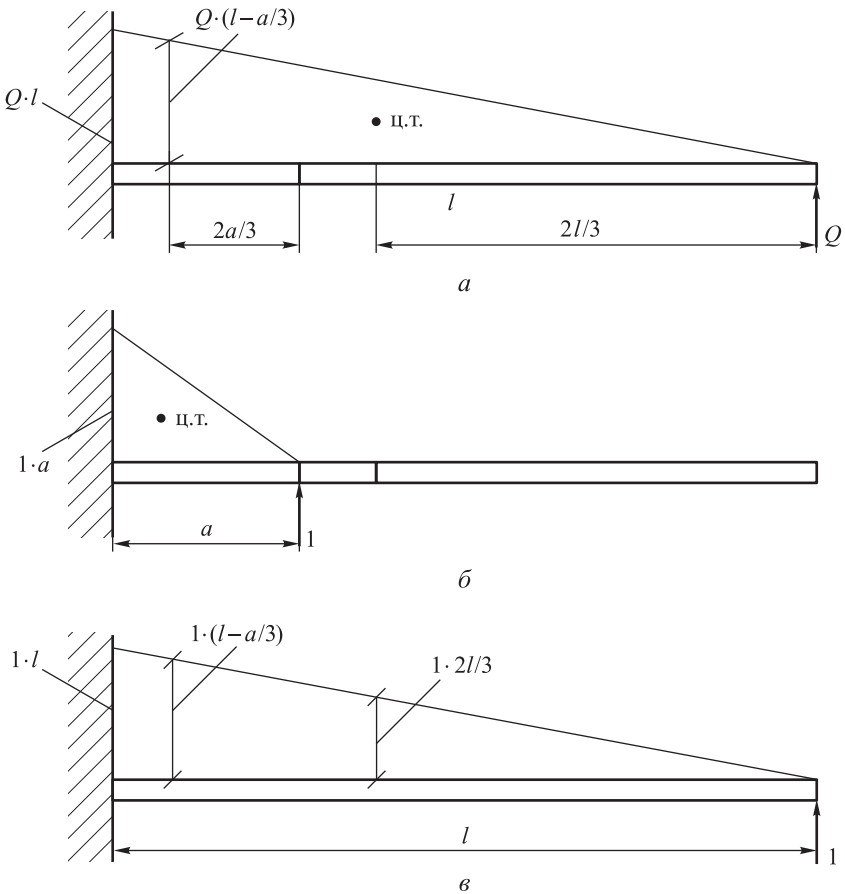


Рис. 79

Далее, аналогично тому, как это делали ранее, умножим площадь эпюры на соответствующую ординату (отметим, что если обе эпюры линейны, то все равно, на какой из них брать площадь, а на какой — ординату) и получим

$$\lambda_{\text{т}Q} = \frac{1}{EI_x}\left[\left(\frac{1}{2}aa\right)Q\left(l - \frac{a}{3}\right)\right],$$

тогда

$$\lambda_{\text{т}} = \frac{a^2}{3EI_x}\left[Fa - \frac{Q(3l-a)}{2}\right].$$

Выразим контактную силу Q через силу F. Это может быть сделано из условия, что перемещения точки контакта пружин *2* и *7* (см. рис. 75), после того как он произошел, одинаковы: $\delta_2 = \delta_7$ (где δ_2 — перемещение пружины *2*; δ_7 — перемещение пружины *7*).

Для определения перемещения $\delta_2 = \delta_{2F} - \delta_{2Q}$ (где δ_{2F} — перемещение в точке контакта от действия силы F; δ_{2Q} — перемещение в точке контакта от действия силы Q) по способу Верещагина приложим в этой точке единичные силовые нагрузки и построим эпюры (см. рис. 77, *в*; 79, *в* и 80, *а*).

Для определения перемещения δ_{2F} умножаем площадь эпюры (см. рис. 77, *а*), построенной для силы F (фактически заменив F_1 на F), на соответствующую ординату на эпюре (см. рис. 77, *в*) и получаем

$$\delta_{2F} = \frac{1}{EI_x}\left\{\left(-\frac{1}{2}Faa\right)\left[-1\left(l - \frac{a}{3}\right)\right]\right\}.$$

Для определения перемещения δ_{2Q} умножаем площадь эпюры (см. рис. 79, *а*) на соответствующую ординату на эпюре (см. рис. 79, *в*) и получаем

$$\delta_{2Q} = \frac{1}{EI_x}\left[\left(\frac{1}{2}Qll\right)\left(1 \cdot \frac{2}{3}l\right)\right],$$

тогда

$$\delta_2 = \frac{1}{EI_x}\left\{\left[\frac{1}{2}Faa\left(l - \frac{a}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}Qll\right)\frac{2}{3}l\right]\right\}.$$

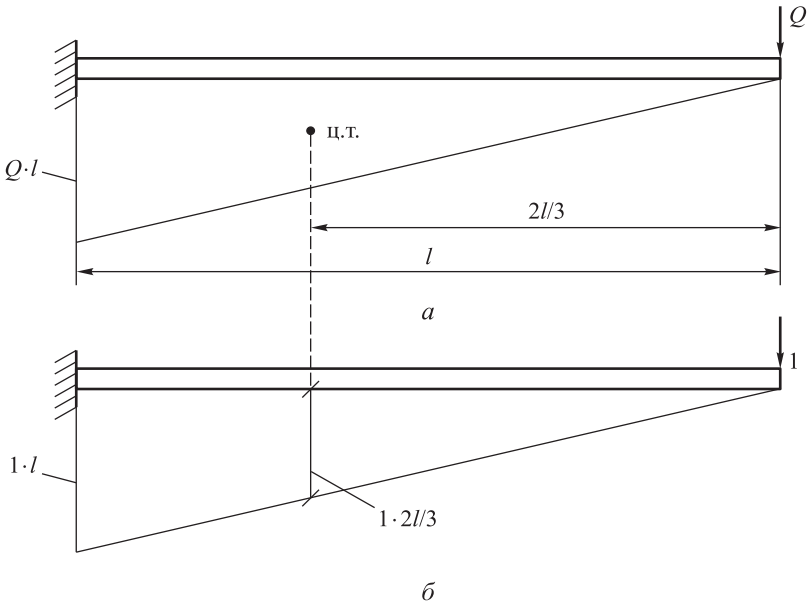


Рис. 80

Перемещение конца пружины *7* может быть получено умножением эпюр, приведенных на рис. 80, *а*, *б*:

$$\delta_7 = \frac{Ql^3}{3EI_x}.$$

Теперь из условия $\delta_7 = \delta_2$ найдем

$$Q = \frac{Fa^2(3l-a)}{4l^3} = \frac{F\cdot 10^2(3\cdot 50-10)}{4\cdot 50^3} = 0,028F.$$

Подставив значение $Q = 0,028F$ в выражение для $\lambda_т$, найдем

$$\lambda_т = \frac{a^2}{3EI_x}\left[Fa - \frac{1}{2}\cdot 0,028F(3l-a)\right] =$$

$$= \frac{F\cdot 10^2}{3\cdot 866}\left[10 - \frac{0,028}{2}(3\cdot 50-10)\right] = 0,31F.$$

По этой формуле при $\lambda_т = 0$ получим $F = 0$, хотя на самом деле в этот момент $F = F_1$. Это объясняется просто: при расчете перемещения системы двух работающих вместе пружин *2* и *7* положение соприкосновения контактов рассматривалось как положение, при котором $F = 0$.

Жесткость упругой системы двух работающих вместе после их контакта пружин *2* и *7* $k_с = F / \lambda_т = F / 0,31F = 3,23$ Н · мм$^{-1}$.

Для определения контактной силы Q в момент посадки пружины *7* на упор *6* требуется записать формулу для δ_y. Расчетная схема и эпюры (от силы Q — контактной силы, действующей на пружину *7* со стороны пружины *2*, а также от единичной нагрузки в месте расположения упора, т. е. там, где ищем перемещение) приведены на рис. 81.

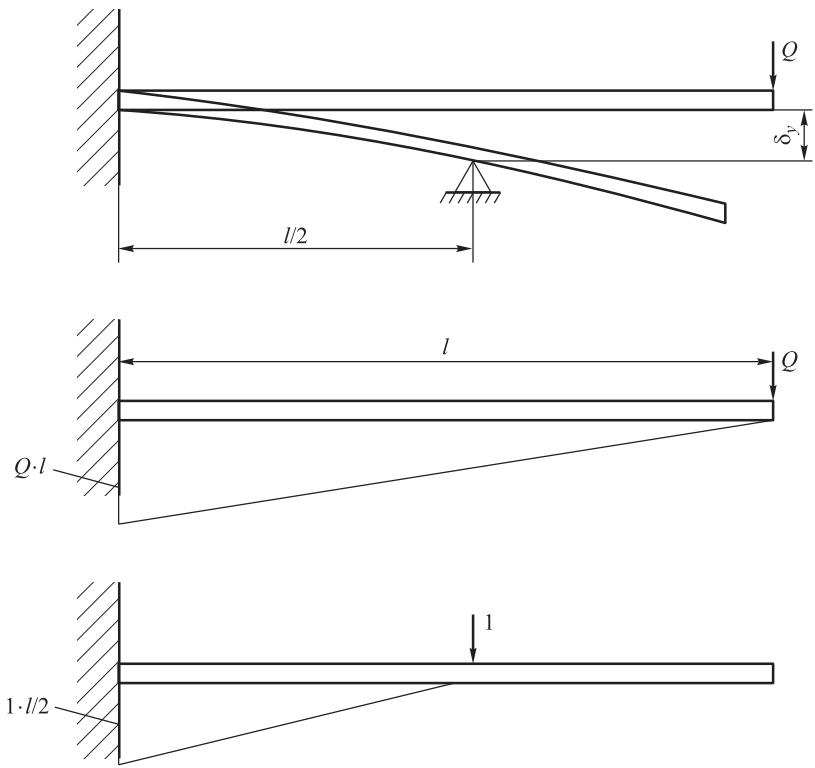


Рис. 81

Умножением площади одной из эпюр на ординату под ее центром тяжести на другой эпюре в итоге получим

$$\delta_y = \frac{1}{EI_x}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{l}{2}\right)\left(-\frac{5}{3}Q\frac{l}{2}\right)\right] = \frac{5Ql^3}{48EI_x},$$

откуда по заданному значению $\delta_y = 1$ мм найдем

$$Q = \frac{48EI_x\delta_y}{5l^3} = \frac{48 \cdot 1{,}33 \cdot 10^5 \cdot 0{,}0065 \cdot 1}{5 \cdot 50^3} = 0{,}066 \text{ Н}.$$

Анализ результатов расчетов показывает, что контактная сила Q в момент соприкосновения контактной пружины *2* с упором *6* (см. рис. 75) более чем в 2 раза превышает силу, создаваемую в момент замыкания контактов, что должно быть учтено при конструировании контактных пружин и самой пары замыкаемых контактов.

Расчеты на прочность при сложном напряженном состоянии

В деталях приборов при их функционировании под действием различных внешних нагрузок могут возникать как простые, так и сложные напряженные состояния. Простое напряженное состояние наблюдается, когда в сечениях детали имеются только нормальные σ или касательные τ напряжения. Если в сечениях имеются одновременно оба вида напряжений, то говорят о сложном напряженном состоянии (см. примеры 5–7).

При сложном напряженном состоянии, когда известны напряжения σ и τ в сечениях детали, для решения вопросов прочности используют замену реального напряженного состояния некоторым равноопасным одноосным состоянием — эквивалентным растяжением — сжатием (оно характеризуется нормальным напряжением $\sigma_{экв}$, которое эквивалентно реально имеющимся напряжениям σ и τ в сечении э.п.у.). Далее в расчете используют критерий прочности $\sigma_{экв} \le [\sigma]$.

Вопрос о соотношении между $\sigma_{экв}$ и имеющимися в сечении напряжениями σ и τ рассматривается в теории сложного напряженного состояния.

В практике подавляющего большинства расчетов стержневых элементов, когда в их сечениях присутствуют одновременно напряжения σ и τ (например, имеются одновременно в.с.ф. — изгибающие и крутящий моменты), пользуются соотношением, полученным на основе наиболее общей теории предельных напряженных состояний Мора:

$$\sigma_{экв} = \frac{1-k}{2} + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

где $k = \sigma_{тр} / \sigma_{тсж}$ ($\sigma_{тр}$ и $\sigma_{тсж}$ — пределы текучести соответственно при растяжении и сжатии для материала стержня).

При k = 1 (для большинства конструкционных материалов) имеем

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \qquad (14)$$

Пример 14. Из расчета на прочность необходимо определить диаметр вала (см. пример *6*). Анализ результирующих эпюр (см. рис. 62) сложного напряженного состояния позволяет утверждать, что наиболее нагруженным местом вала по его длине является то, где установлено косозубое зубчатое колесо. Здесь имеется крутящий момент M и максимальны значения изгибающих моментов: в вертикальной плоскости $M_{x\Sigma} = R_{Bx}l + M_a$, в горизонтальной плоскости $M_{y\Sigma} = R_{Bx}l - F_н(l + l_1)$. Вал имеет круглое сечение. Путем сложения векторов $\vec{M}_{x\Sigma}$ и $\vec{M}_{y\Sigma}$ может быть получен суммарный вектор $\vec{M}_\Sigma$, модуль которого

$$M_\Sigma = \sqrt{{M_{x\Sigma}}^2 + {M_{y\Sigma}}^2}.$$

Максимальные напряжения изгиба от M_Σ, если учесть, что момент сопротивления круглого сечения вала $W_{изг\,кр} \approx 0{,}1d^3$, определяют как

$$\sigma_{max} = \frac{M_\Sigma}{0{,}1d^3}.$$

Максимальные касательные напряжения τ_{max} при действии крутящего момента M, принимая во внимание $W_p \approx 0,2d^3$, равны $\tau_{max} = M/0,2d^3$. Тогда в соответствии с (14)

$$\sigma_{экв\,max} = \sqrt{\left(\frac{M_\Sigma}{0,1d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{M}{0,2d^3}\right)^2} \le [\sigma],$$

откуда

$$d \ge 10\sqrt[3]{\frac{\sqrt{M^2{}_\Sigma + M^2}}{0,1\cdot[\sigma]}}.$$

Полученное из расчета значение d позволяет выбрать из стандартного ряда размеров реальное значение диаметра проектируемого вала.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чем состоит условие статического равновесия детали (твердого тела) по силам?

2. В чем состоит условие статического равновесия детали (твердого тела) по моментам?

3. Объясните, почему на том участке, где эпюра изгибающего момента изменяется по линейному закону, эпюра поперечной силы должна иметь постоянное значение.

4. Объясните, почему на том участке, где эпюра изгибающего момента изменяется по закону квадратной параболы, эпюра поперечной силы изменяется по линейному закону.

5. Какой вид нагружения имеется на участке, для которого эпюра изгибающего момента — парабола?

6. Что означает наличие некоторого значения на эпюре изгибающего момента на конце стержня, где на расчетной схеме имеется шарнир?

7. Почему в примере 1 на прямолинейном участке стержня в.с.ф. изгибающий момент изменяется по линейному закону, а в примере 2 также на прямолинейных участках — на одном по линейному закону, а на другом по квадратичному?

8. Объясните, почему в примере 2 на участке стержня с распределенной нагрузкой q эпюра изгибающего момента M_x имеет экстремум — максимум ($M_{\max} = 25ql^2/18$).

9. Какие принципы лежат в основе получения результирующих эпюр в.с.ф. с помощью суперпозиции? В чем суть этих принципов?

10. Почему на эпюрах M на рис. 21 около угла, где сходятся участки рамы, изгибающие моменты должны быть равны (равны ql^2)?

11. Как осуществляется переход от прямолинейной части изогнутой плоской пружины к ее криволинейной части при рассмотрении и анализе в.с.ф. в примере 4?

12. Какое напряженное состояние имеется на участке *CD* стержня в примере 5?

13. Как силу F_a и с использованием какого правила переносят на ось вала в примере 6?

14. Обоснуйте, почему наиболее опасной точкой вилки в примере 7 является точка *A*.

Литература

Основная

Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. 7-е изд. М.: Высш. шк., 2009. 560 с.

Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов: учебник для вузов. 2-е изд., стер. СПб.: Лань, 2002. 672 с.

Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. 13-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 592 с.

Дополнительная

Вольмир А.С., Григорьев Ю.П., Станкевич А.Н. Сопротивление материалов. М.: Дрофа, 2007. 591 с.

Миролюбов И.Н., Алмаметов Ф.З., Курицын Н.А. Сопротивление материалов: пособие по решению задач. СПб.: Лань, 2007. 512 с.

Расчеты на прочность и жесткость приборных конструкций / Е.В. Веселова, З.Г. Капитанова, А.Г. Лепин и др.; под ред. А.Г. Лепина. М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1985. 49 с.

Снежин А.А. Техника построения эпюр на стержнях, балках и рамах: в 2 ч. Ч. 1. Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2011. 85 с.

Сурьянинов Н.Г. Методы построения эпюр в статически определимых и статически неопределимых системах. Одесса: ОГПУ, 2000. 160 с.

Оглавление

Предисловие 3
Внутренние силовые факторы 5
Примеры определения внутренних силовых факторов и построения эпюр 13
Изгиб 13
Растяжение — сжатие 65
Кручение 67
Расчеты на прочность и жесткость 69
Растяжение — сжатие 70
Кручение 74
Изгиб 76
Расчеты на прочность при сложном напряженном состоянии 86
Вопросы для самопроверки 89
Литература 90

Учебное издание

Жаров Виктор Анатольевич

Определение внутренних силовых факторов и расчет на прочность и жесткость деталей приборных устройств

Редактор *Е.К. Кошелева*
Корректор *Н.В. Савельева*
Художник *А.С. Ключева*
Компьютерная верстка *Е.В. Жуковой*

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Подписано в печать 15.07.2015. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 5,75. Тираж 300 экз. Изд. № 490-2015. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com